

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 13 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25330005

研究課題名(和文) 出力パターン数を計算量として捉えた、新しいしきい値回路解析技術の確立

研究課題名(英文) Exploring the computational power of threshold circuits with the limited number of output patterns

研究代表者

内沢 啓 (Kei, Uchizawa)

山形大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：90510248

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、しきい値回路のとりうる出力パターンの数を、しきい値回路の複雑さを測る尺度の一種として導入し、その出力パターンの数としきい値回路の計算能力との関連性を調査した。その結果、しきい値回路を構成するしきい値素子の重みが小さく制限されていた場合、その出力パターンの数としきい値回路の計算能の間に、強い相関関係があることを示唆する結果を得た。さらに、回路構造に閉路を許す回路を離散力学系の一種として捉えた計算モデルに対して、出力パターンに関連した新しい決定問題を定義し、その計算複雑さが特異なものであることを示唆する結果を得た。

研究成果の概要(英文)：We investigate the computational power of threshold circuits with the limited number of output patterns. We prove that there exists an explicit Boolean function such that any threshold circuit consisting of threshold gates with restricted weights requires an exponential number of output patterns. Our result thus implies that the number of output patterns can be strongly related to the computational power of threshold circuits and its weights of threshold gates. We also consider a discrete dynamical system defined on logic gates, and introduce a decision problem with regard to the output patterns on the system. We then show that the problem may belong to a complexity class of which few problems are known to be candidates of the members.

研究分野：計算理論

キーワード：計算理論 しきい値回路 ニューラルネットワーク 回路計算量理論

### 1. 研究開始当初の背景

論理回路とは、単純な演算を行う論理素子を組み合わせることによって計算を実現する情報処理モデルである。その中でも特に、脳の神経細胞の古典的な理論モデルであるしきい値素子からなる論理回路をしきい値回路と呼ぶ。しきい値回路は、生体情報処理を表現する理論モデルとして研究が展開されているだけでなく、AND素子、OR素子、NOT素子からなる通常の論理回路の計算能力を包含する強力な論理回路としても捉えられ、理論計算機科学の分野でも古くから研究がなされている。しかし、その計算能力についてはいまだ不明な点が多く、様々な「問題が未解決のまま残されている。特に、段数2かつ多項式素子数のしきい値回路によって、NP完全問題は計算できるか」という問いは、否定的に解決されることが多くの研究者により予想されているが、いまだ部分的な解決にしか至っておらず、これを解決する糸口すら明らかでない状況が長く続いている。

一方で、回路を構成するしきい値素子間の接続にフィードバックを許す情報処理モデルとして、ホップフィールドネットワークがよく知られている。ホップフィールドネットワークでは、ネットワークを構成する各しきい値素子の出力(「0」又は「1」)の組合せである出力パターンが、初期状態から時間軸に沿って刻々と変化し、計算が進行する。連想記憶などにホップフィールドネットワークを利用する場合は、計算が収束する出力パターンが、連想された記憶として表現される、収束する出力パターンの数が、記憶できる連想の個数に対応する。フィードバックを持たない通常のしきい値回路にこの概念を当てはめてみると、入力に対する各素子それぞれの出力値を要素とするベクトルが、計算の収束する出力パターンに該当することになる。しかし、ホップフィールドネットワークの記憶容量に相当する、しきい値回路が実現できる出力パターンの数という尺度は、これまでのしきい値回路研究において検討されてこなかった。

### 2. 研究の目的

本研究では、ホップフィールドネットワークに着想を得た、しきい値回路の出力パターンの数という新しい指標に基づいて、しきい値回路の計算能力の解析を行う。ここでしきい値回路の出力パターンとは、回路を構成するしきい値素子の出力となる0と1の組合せの中で、回路への入力によって得ることが可能なものを指す。この出力パターンに着目することにより、しきい値回路が実現する計算について新たな知見を得ることを目的とする。

より具体的には、しきい値回路の計算能力と出力パターンの数に関する、以下の3

つの課題に取り組む。

- (1) 回路の出力パターンの数の多寡と計算能力の関係の解明
- (2) 出力パターンの数と他の計算量との関係の解明
- (3) 出力パターンの個数を数え上げる問題の計算複雑さの解明。

特に研究目的の(1)については、パターンの数の増加によって、計算可能の論理関数が真に増加することを表す、出力パターン数の階層定理の導出を目指す。

さらに、これらの目標に対する取り組みを通して、しきい値回路の出力パターンの数に基づいた、しきい値回路の計算能力を解析する新しい手法の開発も目指す。

### 3. 研究の方法

研究目的の(1)と(2)に対しては、まず既存のしきい値回路がどのような出力パターン数を持つのかについて調査を行い、設計手法及び証明手法開発のための基礎的な知見を収集する。既存の研究では、出力パターンの数は回路の設計を与える上で全く考慮されておらず、結果として、提案された回路の出力パターンの数については解析が全くなされていない。過去に提案されたしきい値回路のパターンの数を見積もることにより、どのような回路の設計によって、出力パターンの数の小さいしきい値回路で計算できるのか、また、どのような論理関数が計算できるのか調査する。さらに、出力パターンの数の大きなしきい値回路でのみ計算ができると考えられる論理関数の候補は何か、調査する。

上記の調査で得られた知識に基づき、出力パターンの数が十分に多いしきい値回路で計算することができる一方で、出力パターンの数の少ないしきい値回路では原理的に計算することのできない論理関数の発見を目指す。こうした論理関数が発見された場合、しきい値回路がその論理関数を計算するために、一定以上の出力パターンの数を必要とすることが示され、しきい値回路の計算能力と出力パターンの数の間に強い相関関係があることを示すことができる。これを達成するため、候補となる論理関数に対して、出力パターンの数ができるだけ小さくなるしきい値回路の設計を行うとともに、その候補に対する、出力パターンの数の下界の導出を行う。さらに、その論理関数の計算に必要な出力パターンの数が、しきい値回路に対する他の指標(素子数、段数、重みなど)と関連を示すことができれば、研究目的の(2)に対する部分的な解答を得ることが期待できる。

これに加えて、研究目的の(3)に対する取り組みとして、しきい値回路の出力パ

ターンと、他の計算量との間にどのような相関関係があるのかについて解析を行う。この課題についてはしきい値回路に限らず、他の情報処理モデルの下で定義される計算複雑さの尺度にも着目し、出力パターンの数とそれら尺度の間にどのような関係が成立するか解析する。

#### 4. 研究成果

研究目的の(1)と(2)に対しては特に、しきい値回路の出力パターンの数が  $2^{n/\log w}$  程度必要となる  $n$  変数論理関数が存在することを示す命題の証明に成功した(主な発表論文等[雑誌論文])。ここで  $w$  は、しきい値回路を構成するしきい値素子の持つ重みの最大値である。すなわちこの成果は、しきい値回路を構成するしきい値素子の重みが入力の多項式程度に小さく制限されていた場合、そのしきい値回路は必ず指数的な出力パターンの数が必要となることを示している。これは、出力パターンの数としきい値回路の計算能力の間に強い関係があることを示唆するとともに、出力パターンの数と回路を構成する素子の重みという指標の間にも、深いつながりがあることを示す結果と言える。また本成果を利用すると、重みの大きさが制限されたしきい値回路に対して、出力パターンの数の階層定理に類するものを導出することが可能である。

さらにこの命題の証明にあたっては、しきい値回路の出力パターンの数を、線形決定木と呼ばれる別の計算モデルを経由した上で、段数2のしきい値回路の素子数と結びつける証明手法を得ている。この証明手法の確立により、段数2のしきい値回路の素子数に対する下界を利用して、出力パターンの数の下界を導出することが可能となった。段数2のしきい値回路は、回路計算量理論の分野で近年大きな注目を集めており、その素子数に対する下界も導出され始めている(引用文献)。本研究で得た証明手法は、こうして最新の研究成果と出力パターンの数という指標を結びつける成果であると言える。

また、しきい値回路の出力パターンの数を利用して、しきい値回路の素子数の下界を導出する成果も得た(主な発表論文等[雑誌論文])。この成果では、しきい値回路のエネルギーという指標が極端に少ない場合について、しきい値回路の素子数の下界を導出している。この下界の導出にあたっては、しきい値回路の出力パターン数が、エネルギーの制限されたしきい値回路の素子数にほぼ一致するという証明手法を開発し、利用している。

さらに、研究目的の(3)に関連して、離散力学系と呼ばれる、しきい値回路とは異なる計算モデルに対して、出力パターンの概念を導入し、成果を得た。離散力学系

とは、回路構造に閉路を許す計算モデルであり、ネットワークを構成する素子群の出力の組合せである出力パターンが、初期状態から時間軸に沿って刻々と変化し、計算が進行する。ホップフィールドネットワークも、この離散力学系の一モデルとして捉えることができる。本成果では、離散力学系の中でも、回路を構成する素子が AND 素子、OR 素子といった、しきい値素子でも表現可能な単純な論理素子からなるものを対象にする。(閉路を許す)回路と、回路の初期状態が与えられると、時間軸に沿って回路の状態が変遷し、計算が進行する。この出力パターンの変遷は、いずれ長さ  $1$  以上の周期を持つループに収束する。ここで次のような決定問題を提案し、その計算複雑さを解析した: 入力として(閉路を許す)回路  $C$ 、初期状態  $a$ 、整数  $k$  が与えられたとき、初期状態  $a$  によって生成されるループの周期は  $k$  以上か? 本研究では、この決定問題が UP という特殊な計算量クラスに属し、かつその補クラスである coUP にも属するという成果を得た(主な発表論文等[雑誌論文])。UP かつ coUP に真に属すると考えられている決定問題は、暗号理論の分野で注目度の高い素因数分解問題に加えて、グラフ上の2人プレイヤーゲームに関する問題が存在するが、これ以外には知られておらず、その計算複雑さは非常に特異なものである。我々の提案する決定問題が真に UP かつ coUP に属するとは直ちには言うことはできないが、計算量理論の分野に対して非常に興味深い成果であると言える。

#### 引用文献

D. M. Kane and R. Williams. Super-Linear Gate and Super-Quadratic Wire Lower Bounds for Depth-2 and Depth-3 Threshold Circuits, to appear in the 48th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2016).

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計12件)

Kei Uchizawa, Daiki Yashima and Xiao Zhou Threshold circuits detecting global patterns in two-dimensional maps, Journal of Graph Algorithms and Applications, 査読有, Vol. 20, pp. 115-131, Feb. 2016.

Takehiro Ito, Yota Otachi, Toshiki Saitoh, Hisayuki Satoh, Akira Suzuki, Kei Uchizawa, Ryuhei Uehara, Katsuhisa Yamanaka, Xiao Zhou, Competitive Diffusion on Weighted

Graphs, Proc. of the 14th International Symposium on Algorithms and Data Structures (WADS 2015), Lecture Notes in Computer Science (LNCS), 査読有, Vol. 9214, pp. 422-433, 2015.

Kei Uchizawa and Eiji Takimoto, Lower Bounds for Linear Decision Trees with Bounded Weights, Kei Uchizawa, Eiji Takimoto, Proc. of the 41st International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science (SOFSEM 2015), Lecture Notes in Computer Science (LNCS), 査読有, Vol. 8939, pp. 412-422, 2015.

Mitsunori Ogihara, Kei Uchizawa, Computational Complexity Studies of Synchronous Boolean Finite Dynamical Systems, Proc. of the 12th Annual Conference on Theory and Applications of Models of Computation (TAMC 2015), Lecture Notes in Computer Science (LNCS), 査読有, Vol. 9076, pp. 87-98, 2015.

Kei Uchizawa, Daiki Yashima and Xiao Zhou, Threshold Circuits for Global Patterns in 2-Dimensional Maps, Proc. of the 9th International Workshop on Algorithms and Computation (WALCOM 2015), Lecture Notes in Computer Science (LNCS), 査読有, Vol. 8973, pp. 306-316, 2015.

Katsuhisa Yamanaka, Erik D. Demaine, Takehiro Ito, Jun Kawahara, Masashi Kiyomi, Yoshio Okamoto, Toshiki Saitoh, Akira Suzuki, Kei Uchizawa, Takeaki Uno, Swapping labeled tokens on graphs, Theoretical Computer Science, 査読有, Vol. 586, pp. 81-94, Jun. 2015.

Katsuhisa Yamanaka, Erik D. Demaine, Takehiro Ito, Jun Kawahara, Masashi Kiyomi, Yoshio Okamoto, Toshiki Saitoh, Akira Suzuki, Kei Uchizawa, Takeaki Uno, Swapping Labeled Tokens on Graphs, Proc. of the 7th International Conference on FUN with Algorithms (FUN 2014), Lecture Notes in Computer Science (LNCS), 査読有, Vol. 8496, pp. 364-375, 2014.

Kei Uchizawa, Takanori Aoki,

Takehiro Ito, Xiao Zhou, Generalized rainbow connectivity of graphs, Theoretical Computer Science, 査読有, Vol. 555, pp. 35-42, 2014.

Kei Uchizawa, Lower bounds for threshold circuits of bounded energy, Interdisciplinary Information Sciences, 査読有, Vol. 20(1), pp. 27-50, 2014.

Kei Uchizawa, Takanori Aoki, Takehiro Ito, On the rainbow connectivity of graphs: complexity and FPT algorithms, Akira Suzuki, Xiao Zhou, Algorithmica, 査読有, Vol. 67(2), pp. 161-179, 2013.

Akira Suzuki, Kei Uchizawa, Xiao Zhou, Energy and fan-in of logic circuits computing symmetric Boolean functions, Theoretical Computer Science, 査読有, Vol. 505, pp. 74-80, 2013.

Akira Suzuki, Kei Uchizawa, Xiao Zhou, Energy-Efficient Threshold Circuits Detecting Global Pattern in 1-Dimensional Arrays, Proc. of the 10th annual conference on Theory and Applications of Models of Computation (TAMC 2013), Lecture Notes in Computer Science (LNCS), 査読有, Vol. 7876, pp. 248-259, 2013.

(学会発表)(計6件)

Mitsunori Ogihara, Kei Uchizawa, Synchronous Boolean Finite Dynamical Systems and Minimum Circuit Size Problem, 第156回情報処理学会アルゴリズム研究会, 2016年1月21, 22日, 湯の原ホテル(宮城県仙台市).

Takehiro Ito, Yota Otachi, Toshiki Saitoh, Hisayuki Satoh, Akira Suzuki, Kei Uchizawa, Ryuhei Uehara, Katsuhisa Yamanaka, Xiao Zhou, Computational Complexity of Competitive Diffusion on (Un)weighted Graphs, 第156回情報処理学会アルゴリズム研究会, 2015年9月28日, 九大西新プラザ(福岡県福岡市).

小比田 祥平, 内澤 啓, スパイキングニューラルネットワークとしきい値回路の計算能力, 夏のLAシンポジウム2015, 2015年7月14, 15日, ゆのくに天祥(石川県加賀市).

坂口 慶介, 内澤 啓, しきい値回路による特徴写像, 夏の LA シンポジウム 2015, 2015 年 7 月 14, 15 日, ゆのくに天祥 (石川県加賀市).

Mitsunori Ogihara, Kei Uchizawa, Computational Complexity Studies of Synchronous Boolean Finite Dynamical Systems, 第 153 回情報処理学会アルゴリズム研究会, 2015 年 6 月 12, 13 日, 定山溪ビューホテル (北海道札幌市).

Kei Uchizawa, Zhenghong Wang, Hiroki Morizumi, Xiao Zhou, Complexity of Counting Output Patterns of Logic Circuits, 第 144 回情報処理学会アルゴリズム研究会, 2013 年 5 月 17, 18 日, 小樽商科大学 (北海道小樽市).

〔その他〕

ホームページ等

<http://tcs.yz.yamagata-u.ac.jp/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

内澤 啓 (UCHIZAWA, Kei)  
山形大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号: 90510248