様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 ２８ 日現在

機関番号： １２１０２
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2013～2015
課題番号： ２５３３０００６

研究課題名（和文）和算で扱われた計算幾何学問題に対する現代的解法の研究

研究課題名（英文）A Study on Computational Geometry Problems from the Old Japanese Mathematics by Computer Algebra

研究代表者
森継　修一（MORITSUGU, Shuichi）

筑波大学・図書館情報メディア系・教授

研究者番号：５０２２００７５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：和算で扱われた計算幾何に関する古典的問題から、①シュタイナー環におけるデカルトの円定理の拡張、②円内接多角形問題、の2題を取り上げ、現代の数式処理ソフトウェアの活用により、既知の公式の検証、およびその拡張としての未知の公式の導出において複数の成果があった。特に後者に関して、円に内接する五角形・六角形の面積と外接円の半径を表す関係式は、約1300年間未解決だった問題を完全に解明した、世界の数学史上画期的な成果である。

研究成果の概要（英文）：We picked up several computational geometry problems from the old Japanese mathematics in the 17th century. We succeeded in deriving new formulae for (1) extension of Descartes circle theorem for Steiner n-cycles, and (2) area, circumradius, and their integrated formulae for inscribed polygons. In particular, for the latter problem, the integrated formulae for inscribed pentagons and hexagons are quite original in the history of mathematics, which has been unsolved for about 1,300 years.

研究分野： 情報科学

キーワード： 計算幾何　数式処理　和算

１．研究開始当初の背景

和算とは、主に江戸時代の日本で独自に発達した数学であり、分野によっては西洋数学に匹敵する成果を残した数学者・著作も多数存在する。特に、寺社に奉納された多数の「算額」によって、その水準の高さが国内外に知られるようになってきている。

これらの成果については、数学史研究の立場から文献解釈に基づく研究が積み重ねられてきているが、「手計算では扱えない複雑な問題」になると、実質的に手つかずの状態になっているものも多く、コンピュータサイエンス研究の立場から、現代の数式処理ソフトウェアを活用した計算の実行や公式の検証が期待されていた。

本研究で取り上げた計算幾何学の問題は、申請時点でも部分的な結果が得られていたものであり、今回の研究期間においてさらにそれらを発展させることが課題とされていた。

２．研究の目的

上記の背景のもとに、和算で扱われた古典的な初等幾何の計算問題２題に対して、既知の公式のコンピュータによる検証を行い、和算家による計算の正当性を確認することが最初の目的となった。さらに、その拡張として、現代的な数式処理アルゴリズムとコンピュータの計算能力を活用し、未知の公式の導出を目指すことを本研究の最終的な目的とした。

同時に、計算アルゴリズムの効率化を考慮し、「グレブナー基底による方法」「終結式による方法」の比較検討を行いながら研究を進めた。そのために、Reduce, Risa/Asir, Mapleなどの各種数式処理ソフトウェアを活用し、性能や特徴の比較検討も行い、目的の計算に適した実行環境を模索することも課題であった。

３．研究の方法

具体的な研究方法は、問題の定式化と数式処理システム上でのプログラミングおよび計算機実験である。最終的には、数式処理システムとしては、主として Maple (Ver.14～18,Windows/Linux)を利用した。Windows 版 Maple の Ver.16～18 は、並列処理環境との相性の問題で、性能が十分引き出せないケースがあることが判明し、この点は注意を要する。

計算機実験は、ワークステーション Lenovo ThinkStation D20（平成 22～24 年度科研費 22500004 で購入)および アプライド社 CERVO-Grasta Type ES2（本科研費で購入）の 2 台を最大限活用して行った。前者を Windows、後者を Linux で運用したことで、同じ数式処理システム Maple でも性能に違いが出ることを確認しながら計算を行った。

４．研究成果

主として、以下の２つの幾何学的な問題について、既知の公式の検証と未知の公式の導出に成果があった。

(1) シュタイナー環におけるデカルトの円定理の拡張

シュタイナー環とは、外円と心円の間に、お互いに接するような円を順次挿入して、環をなすように描いた図形(図 1)である。この図形において成り立つ関係式として、$n=3$の場合における「デカルトの円定理」(1643)が有名であるが、4 個以上の環円に直接拡張した結果は、具体的には知られていなかった。また、シュタイナー(1796-1863)自身による公式もいくつか知られているのに対し、同様の結果が和算でも得られていて、それらの関係の解明も課題であった。

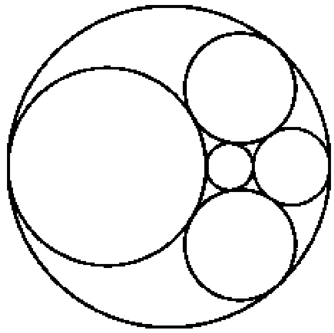

図１　シュタイナー環$(n=4)$

これらの状況の下で行った本研究の成果は、以下のような未知の公式の導出に成功した点に要約される。

- 環円４個の場合

環円と外円の関係は４次方程式で表される。

- 環円５個の場合

環円と外円の関係は 24 次方程式で表される。

- 環円６個の場合

環円と外円の関係は 48 次方程式で表されるが、これは 12 次と 36 次の方程式に因数分解される。

これらの結果は雑誌論文⑤で公刊され、オリジナリティが認められているので、世界初の成果といってよい。日本国内でも、一般向け数学雑誌「数学セミナー 2014 年 7 月号」（日本評論社）にこの話題および雑誌論文⑥が取り上げられるなど、社会に向けての還元・普及に貢献できたと考えられる。

なお、本問題に関する今後の研究課題としては、以下のような点が挙げられる。

- 環円７個以上の場合を含めた方程式の次数の幾何学的意味の解明

７個では 160 次、８個では 320 次の方程式

が導かれると予想されるが、その因数分解可能性も含めて、実際に計算するのは困難である。

- 法道寺善「観術」(1861)が用いた関係式の解明

同書では、環円 4 個の場合の外円の直径を数値計算で求めているが、方程式の立て方が未解明である。

- 安島直円「廉術変換」(1784)における理論との関連の解明

同書では、環円の直径の間に成り立つ漸化式を導き、環が閉じるための条件式を示している。これを取り入れることで、さらなる解析が進められないかと考えられる。

これらの点は、研究期間当初から課題として認識されていたが、残念ながら公表できるような成果は得られなかった。今後、これらの問題を発展させることで、「コンピュータサイエンスから和算研究へ」という方向の貢献も期待される。

(2) 円内接多角形問題における各種公式の導出

この問題は、「円に内接するn角形の各辺の長さ$a_1,\dots,a_n$が与えられたとき、その多角形の面積S・外接円の半径Rおよびそれらの関係を$a_1,\dots,a_n$の式で表せ」という古典的な問題である。

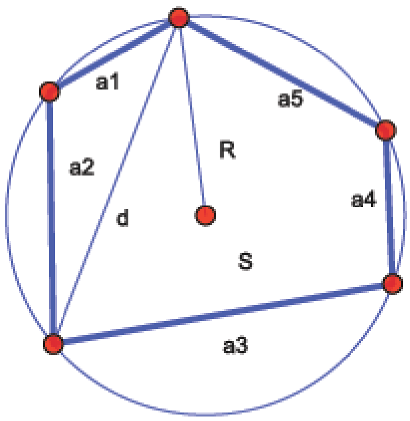

図 2　円内接多角形問題($n=5$)

面積および外接円の半径に対しては、古典的な結果として、$n=3$に対する Heron の公式(紀元 1 世紀)、$n=4$に対する Brahmagupta の公式(628)が知られている。これに対し、$n=5$(図 2)については約 1300 年間未解決とされ、20 世紀末に至り、各公式の具体的な形が明らかにされてきた問題である。

本研究では、特に、「面積と半径の関係を表す公式（以下、「統合公式」）の導出に取り組み、画期的成果を得た。以下、得られた成果を公式ごとに列挙する。

- 面積公式

Robbins(1994)が$n=5,6$の場合の公式を導いたのが世界初の成果である。Robbins は数値補間による技巧的な方法を用いており、結果の正当性は確認されているものの、他者がそのまま再現することは困難である。そこで、「終結式による消去計算」のみの初等的な導出方法を示し（雑誌論文②)、追試可能な形で記述し直した点が、独自の成果である。

- 半径公式

和算における成果として、建部(1683)・井関(1690)による$n=5$の場合の公式導出がある。これに対し、西洋数学では、Robbins (1994)まで具体的な式の形は知られていなかったようである。また、$n=6,7$に対する半径公式の導出は、Moritsugu(2011)が初めて成功している。この時点での$n=7$に対する半径公式は、337,550,051 項から成る 38 次式であった。これらを受けて、本研究では、

- ✓ $n=6$の場合の公式の計算効率化
- ✓ $n=7$の場合の「基本対称式表現」への変換によるコンパクトな表現の導出

に成功している（学会発表①)。特に$n=7$の場合の公式(基本対称式表現で 199,695 項の 38 次式)は、他に公刊されたものはない世界唯一の結果とみられる。

今後は、$n=8$に対する半径公式が課題となるが、メモリサイズの点から直接的な計算は困難になると予想され、問題を多数の小問題に分割して計算する方法を考案中である。

- 統合公式

Heron($n=3$), Brahmagupta($n=4$)の面積S・半径Rに関する公式を結びつけると、$z=4SR$あるいは $Z=z^2$に関する「統合公式」が容易に導き出せる。その「統合公式」の形状をまとめると

- ✓ $n=3$　zの 1 次式 および Zの 1 次式
- ✓ $n=4$　(Zの 1 次式)×(Zの 1 次式)
  zによる表現は存在しない

と表すことができる。このように$n=2m-1,2m$の 2 つの場合が密接に関係していることに問題の特徴がある。

したがって、上記の結果を$n=5,6$における面積公式・半径公式と比較すると、zまたはZに関する「統合公式」は

- ✓ $n=5$　zの 7 次式 および Zの 7 次式
- ✓ $n=6$　(Zの 7 次式)×(Zの 7 次式)
  zによる表現は存在しない

となることが予想されるが、これまで誰も計算に成功しておらず、“missing”であるとされてきた。(研究の過程で、$n=5$の場合のみ、不完全な形での報告が存在することが判明した。)

本研究では、この問題を完全解決し（雑誌論文①③)、$n=5,6$の場合の統合公式の具体的な形をすべて求めることに成功した。これは、Brahmagupta (628)以来の未解決問題を決着させた、数学史上画期的な成果である。

公式の具体的な形は、それぞれ「基本対称式」によるコンパクトな表現に変換して、

- ✓ $n=5$ zの 7 次式(18 項) および、Zの 7 次式(63 項)
- ✓ $n=6$ (Zの 7 次式 327 項) ×(Zの 7 次式 327 項)

である。$n=6$の場合の最終ステップでは、因数分解に約 10 日の CPU 時間を要する難問であった。計算アルゴリズムとしては、「終結式による消去」「多変数多項式の因数分解」という数式処理システムにおける基本的機能しか利用していないが、最新のワークステーションを用いても実行困難なサイズの問題であることがわかる。

今後の発展としては、同様の公式が$n=7,8$にも存在することが予想されるが、

- ✓ $n=7$ zの 38 次式 および Zの 38 次式
- ✓ $n=8$ (Zの 38 次式)×(Zの 38 次式) zによる表現は存在しない

と次数が上がり、式自体も巨大なものになるため、直接の計算は困難である。むしろ、各公式の形状のもつ幾何学的な意味の解明などが課題になると考えられる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① Moritsug,S., Integrated Circumradius and Area Formulae for Cyclic Pentagons and Hexagons, ADG 2014, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 9201, 94-107, 2015. ［査読有］
DOI:10.1007/978-3-319-21362-0_6

② 森継修一, 円内接多角形における面積式・半径公式・統合公式について, 京都大学数理解析研究所講究録, 1955, 91-101, 2015. ［査読無］
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1955-10.pdf

③ Moritsugu,S., Integrating Circumradius and Area Formulae for Cyclic Pentagons, ICMS 2014, Lecture Notes in Computer Science, 8592, 214-221, 2014. ［査読有］
DOI:10.1007/978-3-662-44199-2_34

④ 森継修一, 円内接多角形問題について－半径公式と面積公式の統合－, 京都大学数理解析研究所講究録, 1907, 174-181, 2014. ［査読無］
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1907-21.pdf

⑤ Moritsugu,S., Extending the Descartes Circle Theorem for Steiner n-Cycles, ADG 2012, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 7993, 48-58, 2013. ［査読有］
http://www.springer.com/us/book/9783642406713

⑥ 森継修一, シュタイナー環におけるデカルトの円定理の拡張について, 京都大学数理解析研究所講究録, 1843, 155-162, 2013. ［査読無］
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1843-17.pdf

〔学会発表〕（計 5 件）

① 森継修一, 円内接多角形問題について－半径公式再論, 研究集会「数式処理とその周辺分野の研究」, 京都大学(京都府京都市), 2015.12.4.

② 森継修一, 円内接多角形における面積公式・半径公式・統合公式について, 文部科学省現象数理学共同研究協働拠点研究集会「文理融合を目指した折紙科学研究」, 明治大学(東京都中野区), 2015.11.12.

③ 森継修一, 円内接多角形における面積公式・半径公式・統合公式について, 研究集会「数式処理とその周辺分野の研究」, 京都大学(京都府京都市), 2014.12.25.

④ Moritsugu,S., Integrating Circumradius and Area Formulae for Cyclic Pentagons, ICMS 2014, Seoul(Korea), 2014.8.5.

⑤ 森継修一, 円内接多角形問題について－半径公式と面積公式の統合－, 研究集会「数式処理とその周辺分野の研究」, 京都大学(京都府京都市), 2013.12.27.

６．研究組織

(1)研究代表者

森継　修一（MORITSUGU, Shuichi）
筑波大学・図書館情報メディア系・教授
研究者番号：50220075