

令和元年6月10日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2018

課題番号：25330013

研究課題名(和文)非古典論理の代数的証明論とラムダ計算の交差型システムの研究

研究課題名(英文)Algebraic Proof Theory for Nonclassical Logics and Intersection Types for Lambda Calculus

研究代表者

照井 一成 (Terui, Kazushige)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：70353422

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：第一に、非古典論理の研究における証明論的手法と代数的手法の融合を求め、代数的証明論のプログラムを推進した。結果として、順序代数の新しい完備化(超MacNeille完備化)や稠密化の手法が得られ、ファジー論理のいくつかの体系について、標準完全性定理の代数的証明を与えることに成功した。第二に、代数的・意味論的観点から関数型プログラミングの基礎研究(構成的証明論・ラムダ計算)を行った。特に、伝統的証明論における規則の技法が順序代数におけるMacNeille完備化と密接に関係することを見出し、「論理のカット除去=算術の1無矛盾性」という既知の対応を帰納的定義の諸体系へと敷衍した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

「回り道を含む証明をまっすぐにすること」と「与えられた順序代数(ブール代数等)を完備化すること」の間には密接な関係がある。証明と代数の間に見られるこの種の対応関係をなるべく多く見出し、系統化すること、それにより伝統的に二分された証明論と(代数的)意味論の垣根を取り払い、両者の相乗効果で新しい成果を導き出すこと、それが本研究の目標であり存在意義である。また数学基礎論的な証明論(数学理論の「強さ」を調べる)とコンピュータ科学的な証明論(「証明=プログラム」という観点から証明のダイナミズムを調べる)の垣根を取り払うことにもつながる。このように本研究は様々な理論やアプローチを「橋渡し」する意義を持つ。

研究成果の概要(英文)：First, we have developed a research program called the algebraic proof theory, aiming at an integration of proof theoretic and algebraic methods in nonclassical logics. It has resulted in a new completion method for ordered algebras (hyper-MacNeille completion) and a method for densification, leading to a purely algebraic proof to the standard completeness of various fuzzy logics. Second, we have studied the foundations of functional programming (constructive proof theory and lambda calculus) from the algebraic-semantic point of view. In particular, we have focused on the Omega-rule technique in the traditional proof theory and discovered an intimate connection with the MacNeille completion in ordered algebras. It has resulted in a generalization of the known correspondence between cut elimination in logic and 1-consistency in arithmetic to arithmetical theories of inductive definitions.

研究分野：数理論理学

キーワード：部分構造論理 代数的証明論 MacNeille完備化 順序代数の稠密化 ラムダ計算 共通型 規則

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

非古典論理に関して、十数年前より代数的証明論という研究プログラムを推進してきた。基本的なアイデア(カット除去=完備化)およびフレームワーク(剰余フレーム理論)はすでに得られていたものの、当該プログラムにはまだまだ発展の余地があった。一方で関数型プログラミング基礎論(ラムダ計算)に関しては、過去に共通型(交差型)システムを用いたラムダ項の高速計算の研究を行っており(2012年 RTA 最優秀論文賞)、そのさらなる展開可能性を模索しているところであった。

### 2. 研究の目的

非古典論理およびラムダ計算における代数的・意味論的手法を推進すること。

- (1) 非古典論理の代数的証明論を継続・発展させる。特に非古典論理の証明論におけるさまざまな証明変形の技法が、代数的にも意味を持つことを明らかにする。そのために証明論に由来する剰余フレームの理論をさらに発展させる。
- (2) ラムダ計算における共通型システムの意味論的基礎について研究する。ラムダ計算の共通型と線形論理のスコット意味論の間に見られる対応関係を、他の型システム・意味論へと敷衍し、応用可能性を探る。

### 3. 研究の方法

概念定義と定理証明に基づく通常の数学的方法による。

### 4. 研究成果

目的(1)について：

証明論における超シーケント計算と順序代数における正準拡大のアイデアを融合し「超正準拡大」の手法を確立した。これは、よい性質を保ちつつ FL 代数を完備化するための手法である。応用として、様々な非古典述語論理についてエルブランの定理を代数的に証明し、エルブランの定理の代数的本質をとらえることに成功した。また、超シーケント計算における稠密規則除去定理のアイデアを順序代数の文脈に持ち込み、与えられた全順序 FL 代数を稠密化するための統一的手法を開発した。特に、ファジー論理の重要な体系の一つである uninorm logic が標準意味論について完全であることの代数的証明を与えることに成功した。

非古典論理の証明論を Brouwer 流の不動点定理と関連付ける研究を行った。Lukasiewicz の無限多値論理(およびその下位論理)は、自己否定やその他の不動点演算子を加えても無矛盾なことが知られており、その証明には普通 Brouwer の不動点定理が用いられる。本研究ではその逆方向、つまり Lukasiewicz 論理 + 不動点演算子の無矛盾性を証明論的に示すことができれば、そこから Brouwer の定理が帰結することを示した。無矛盾性証明自体は未だ達成されていないものの、関連成果がいくつか得られた。たとえば不動点演算子と矛盾しない部分構造論理の範囲確定等が挙げられる。

抽象代数論理における一連の「橋渡し」定理の分析を行った(たとえば論理が局所演繹性を持つことと、対応する代数クラスが合同拡張性を持つことの一一致など)。橋渡しの本質は、論理の theory からなる圏とそれに対応する代数がなす圏の間にある関手の存在に集約される。この洞察に基づいて一連の橋渡し現象に見通しのよい説明を与え、論理における Robinson 性や局所演繹性、性質のよいメタ選言を持つための条件に対して新しい特徴づけを与えた。

目的(2)について：

ラムダ計算の共通型システムと線形論理の表示的意味論(とくに整合空間意味論)との対応関係を念頭においた上で、計算可能解析における表現の理論へと応用する研究を行った。実直線、ユークリッド空間、連続関数空間などは整合空間を用いて表現することができる。すると整合空間上の安定写像によって連続写像や連続作用素がびったり表現できる。また興味深いことに、整合空間上の線形写像は、実直線上では一様連続写像にちょうど対応する。このことから、ハイネの定理(実直線のコンパクト区間上で連続性と一様連続性が一致すること)の計算内容をあらかず安定写像が具体的に構成できる(松本慧氏との共同研究)。

伝統的証明論とラムダ計算の型理論を関連づける研究を行った。具体的には可術的・帰納的な体系と非可術的な体系の比較という伝統的証明論以来の課題を取り上げ、そのための技法(Buchholz の規則)をラムダ計算の文脈にもたらず試みである。それにより多相型ラムダ計算のパラメータフリーな部分体系について、強正規化定理を「可術的に」証明することに成功した。またシステム T を一般化し、反復帰納的データ型を持つ体系を考えると、それが上記のパラメータフリーな部分体系と表現力において正確に一致することを証明した(秋吉亮太氏との共同研究)。

最後に目的(1)、(2)両方に関わる予期せぬ結果が得られた。

- (1)で述べた証明論への代数的アプローチが、単に部分構造論理をはじめとする非古典論理

だけでなく、普通の論理（高階古典論理、高階直観主義論理）や二階算術における伝統的証明論の問題にも有用であることを示した。具体的には、(2)で述べた Buchholz の規則が、代数的証明論の核心にある MacNeille 完備化により基礎づけられることを示した。リンデンバウム代数の完備化に限っていえば、規則が真になるのは、それが MacNeille 完備化の場合に限られることを示し、また規則が一般には偽になることを示す反例を与えた。これらの結果により前原・岡田の代数的カット除去証明法がパラメータを含まない場合にスケールダウンできて、帰納的定義の有限回の繰り返しのみを許す算術の体系で形式化可能なことを示した。これらの洞察は、膨大な歴史と文献により裏付けられた伝統的証明論に対して、新しく代数的アプローチを提示するものとして重要である。

## 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計5件)

Kazushige Terui, MacNeille Completion and Buchholz' Omega Rule for Parameter-Free Second Order Logics. Proceedings of CSL'18, 37:1-19, 2018 (査読有).  
DOI: 10.4230/LIPIcs.CSL.2018.37

Agata Ciabattoni, Nikolaos Galatos and Kazushige Terui. Algebraic proof theory: Hypersequents and hypercompletions. Annals of Pure and Applied Logic, 168(3):693-737, 2017 (査読有)  
DOI: 10.1016/j.apal.2016.10.012

Ryota Akiyoshi and Kazushige Terui. Strong Normalization for the Parameter-Free Polymorphic Lambda Calculus Based on the Omega-Rule. Proceedings of FSCD'16, 5:1-15, 2016 (査読有).  
DOI: 10.4230/LIPIcs.FSCD.2016.5

Paolo Baldi and Kazushige Terui. Densification of FL chains via residuated frames. Algebra Universalis, 75(2):169-195, 2016 (査読有).  
DOI: 10.1007/s00012-016-0372-5

Damiano Mazza and Kazushige Terui. Parsimonious Types and Non-uniform Computation. Proceedings of the 42nd ICALP, LNCS9135, 350-361, 2015 (査読有).  
DOI:10.1007/978-3-662-47666-6\_28

[学会発表](計18件)

Kazushige Terui. MacNeille Completion and Buchholz' Omega Rule for Parameter-Free Second Order Logics. 27th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic, 2018.

照井一成. Bot in nonclassical logics. 第53回 MLG 数理論理学研究集会, 2018.

Kazushige Terui. MacNeille completion and Buchholz' Omega rule. Second Workshop on Mathematical Logic and its Applications, 2018 (招待講演).

Kazushige Terui. Substructural logics with fixpoints. 7th ALCOP: Algebra and Coalgebra meet Proof Theory, 2016 (招待講演).

Kazushige Terui. Intersection types for real number computation. 8th Workshop on Intersection Types and Related Systems, 2016 (招待講演).

Kazushige Terui. How useful is proof theory for substructural logics? SYMICS: Syntax meets Semantics, 2016 (招待講演).

Kazushige Terui. On predicative fragments of System F. Workshop: Linear Logic, Mathematics and Computer Science, 2016 (招待講演).

Kei Matsumoto and Kazushige Terui. Coherence spaces for computable analysis. 20th International Conference on Computability and Complexity in Analysis, 2015.

Kazushige Terui. On applications of models of linear logic. Thematic trimester: Semantics of Proofs and Certified Mathematics, 2014 (招待講演).

Kazushige Terui. Ludics and interactive completeness. Logic and Games (Vienna Summer of Logic), 2014 (招待講演).

Kazushige Terui. Proof theory for ordered algebra: amalgamation and densification. Structures and Deduction (Vienna Summer of Logic), 2014 (招待講演).

Kazushige Terui. Intersection Types for Normalization and Verification. 21st Workshop on Logic, Language, Information and Computation, 2014 (招待講演).

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。