

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 6 日現在

機関番号：16101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25330015

研究課題名(和文)自己相似性をもつグラフ族の生成と構造的性質の解明及びその応用に関する研究

研究課題名(英文)Studies on generation of graph classes with self-similar structures and investigation of their structural properties with applications

研究代表者

蓮沼 徹 (Hasunuma, Toru)

徳島大学・大学院理工学研究部・准教授

研究者番号：30313406

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究ではまず細分線グラフ演算を新たに導入しこの演算により生成される反復細分線グラフのグラフ族を定義した。このグラフ族は自己相似性をもつグラフ族としてよく知られているシェルピンスキーグラフと拡張シェルピンスキーグラフを本質的に含んでいる。次に、反復細分線グラフの様々な構造的性質を調べた。また、単射的グラフ展開の基グラフに対して構造的性質に関する結果を証明した。さらに、一般化シェルピンスキーグラフと拡張シェルピンスキーグラフを共に含む、普遍化シェルピンスキーグラフのグラフ族も新たに導入し、相互結合網上の耐故障性に関する問題に応用可能な構造的性質を調べた。

研究成果の概要(英文)：We have newly introduced the subdivided-line graph operation and defined the class of iterated subdivided-line graphs which essentially contains well-known graph classes with self-similar structures such as the Sierpinski graphs and the extended Sierpinski graphs. We have then studied their structural properties such as edge-disjoint Hamilton cycles, hamiltonian-connectivity, hub sets, connected dominating sets, independent spanning trees, completely independent spanning trees, various colorings and labelings, globally h-connected defensive t-alliances, and (h,l)-connected dominating sets. We have also shown results on structural properties for base graphs of injective graph expansions. Moreover, we have newly introduced the class of universalized Sierpinski graphs which contains both the classes of generalized Sierpinski graphs and extended Sierpinski graphs, and then studied their structural properties which can be applied to fault-tolerant problems on interconnection networks.

研究分野：情報学基礎理論

キーワード：グラフ理論 細分線グラフ演算 シェルピンスキーグラフ 完全独立全域木 連結防衛同盟 連結支配
集合 相互結合網 耐故障性

1. 研究開始当初の背景

自己相似性をもつグラフとして、シェルピンスキーグラフ(Sierpiński graph)と呼ばれるグラフ族が知られている。シェルピンスキーグラフは1997年に、Klavžar と Milutinovićにより、Lipscomb空間のトポロジー研究の一般化を動機として導入されたグラフであり (S. Klavžar and U. Milutinović, Graphs $S(n, k)$ and a variant of the Tower of Hanoi problem, Czechoslovak Math. J. 47 (1997) 95-104), その興味深い自己相似性、ハノイの塔の問題から派生したハノイグラフやシェルピンスキーの三角形に関連していることなどから注目を集め、これまでに、距離次元、辺素ハミルトン閉路、中継集合、彩色、交差数、 $L(2, 1)$ -ラベリング、完全符号等、様々な性質が調べられている。

一方、超並列計算機の相互結合網(プロセッサ同士の結合の仕方、プロセッサを頂点对応させて得られるグラフ)として、1988年に Vecchia と SangesによりWK-再帰網と呼ばれるグラフが提案されており (G.D. Vecchia and C. Sanges, A recursively scalable network VLSI implementation, Future Generation Comput. Syst. 4 (1988) 235-243), 相互結合網の観点から、直径、連結度、ルーティングアルゴリズム、耐故障性を考慮したハミルトン閉路等が研究されていたが、このWK-再帰網とシェルピンスキーグラフは非常に類似しており、WK-再帰網における開辺(open edge)と呼ばれる特殊な辺を除いたグラフは実はシェルピンスキーグラフと同型なグラフであった。研究開始当初にこの事実を指摘しているものは、研究代表者の知る限り、掲載予定の1編の論文 (C-H. Lin, J-J. Liu, and Y-L. Wang, Global strong defensive alliances of Sierpiński-like graphs, Theory of Comput. Syst. to appear (published online: 29 August 2012))と1編のプレプリント論文 (S. Klavžar and S. S. Zemljčič, On distances in Sierpiński graphs: almost-extreme vertices and metric dimension, preprint, July 20, 2012)の2編だけであり、それぞれの分野で独立に研究されてきたと考えられる。

2. 研究の目的

本研究では、まずシェルピンスキーグラフを含む自己相似性をもつグラフ族を生成するグラフ演算の概念(graph expansion: グラフ展開)を新たに導入する。シェルピンスキーグラフの一般化としては、Gravierらによる一般化Sierpińskiグラフ (S. Gravier, M. Kovše, and A. Parreau, Generalized Sierpiński graphs, preprint)が提案されているが、本研究で導入するグラフ展開は別の一般化である。特に、単射的グラフ展開の基本的なも

のは各頂点を完全グラフに置き換えるものであり、このようなグラフ展開に限定してもシェルピンスキーグラフを包含している。この単射的完全グラフ展開は、既知の演算である重心細分演算(barycentric subdivision)と線グラフ演算(line graph operation)を組み合わせることにより定義できることに着目し、これら2つの演算を組合わせた演算を細分線グラフ演算(subdivided-line graph operation)として新たに導入する。さらに、単射的グラフ展開とは別の観点からの、シェルピンスキーグラフの一般化グラフ族も導入する。この一般化では、前述の一般化シェルピンスキーグラフと共に拡張シェルピンスキーグラフ(extended Sierpiński graph)と呼ばれるシェルピンスキーグラフの変種グラフも包含するグラフ族で、普遍化シェルピンスキーグラフ(universalized Sierpiński graph)と名付ける。

本研究では、これらのシェルピンスキーグラフを含む自己相似性をもつグラフ族の構造的性質を調べ、新たな知見の発見を目指すと共に、それらの相互結合網上の諸問題、特に耐故障性に関する問題への応用について考察することを目的とする。また、シェルピンスキーグラフ及び拡張シェルピンスキーグラフの既知結果の拡張及び一般化についても考察を行う。シェルピンスキーグラフ及び拡張シェルピンスキーグラフのいくつかの既知の構造的性質は、細分線グラフ演算により生成されるグラフの構造的性質を調べることにより、結果の拡張だけでなく、証明の簡易化もできると考えている。

3. 研究の方法

細分線グラフ演算により生成されるグラフ、単射的グラフ展開及びその基グラフ、普遍化シェルピンスキーグラフに関する構造的性質について、組合せ論、グラフ理論、アルゴリズム論、計算論における各種手法を駆使しながら考察を進める。また、適宜適切な概念を導入しつつ、研究対象に関する補題、定理、命題の予想と証明に地道に取り組み、研究目的達成を目指す。

4. 研究成果

(1) ハミルトン閉路に関する結果

細分線グラフ (G) がハミルトン閉路をもつための必要十分条件は G が全域オイラー閉路をもつことであることを証明した。また、 G が k 本の辺素ハミルトン閉路をもつならば、 G の n 反復細分線グラフ ${}^n(G)$ も k 本の辺素ハミルトン閉路をもつことを証明した。特に、辺素ハミルトン閉路の存在は、耐故障性の問題に应用することができる。この辺素ハミルトン閉路の結果をシェルピンスキーグラフ及び拡張シェルピンスキーグラフに適用す

ることにより、既知結果(B.Xue,L.Zuo,and G.Li, The hamiltonicity and path t-coloring of Sierpiński-like graphs, Discrete Applied Math. 160 (2012) 1822-1836)が得られるが、証明は既知結果のものより短い。すなわち、結果として一般化するだけでなく証明の簡易化を達成することができた。さらに、ハミルトン連結特性についても考察し、 G が強ハミルトン連結ならば $\chi(G)$ も強ハミルトン連結であることを証明した。

(2) 中継集合及び連結支配集合に関する結果

細分線グラフ (G) の中継集合及び連結支配集合の最小濃度が、共に $2(|V(G)|-1)$ に等しいことを証明した。辺素ハミルトン閉路の結果のときと同様に本結果も、シェルピンスキーグラフ及び拡張シェルピンスキーグラフに関する既知結果 (C.-H.Lin, J.-J.Liu, Y.-L.Wang, and W.C.-K.Yen, The hub number of Sierpiński-like graphs, Theory of Comput. Syst. 49 (2011) 588-600) を一般化すると共に証明の簡易化に成功した。

(3) 独立全域木及び完全独立全域木に関する結果

G の任意の頂点を根とする k 本の独立全域木が存在するならば、 (G) にも任意の頂点を根とする k 本の独立全域木が存在することを証明した。また、 k を G の頂点の最小次数の半分以下として、 G が k 本のハミルトン道をもつならば、 $\chi(G)$ は k 本の完全独立全域木をもつことを証明した。これらの結果をシェルピンスキーグラフ及び拡張シェルピンスキーグラフに適用することにより、これらのグラフにおける(完全)独立全域木に関する新規の結果が得られ、特に、シェルピンスキーグラフ及び拡張シェルピンスキーグラフにおける完全独立全域木の最大本数を決定することができた。(1)と(2)の結果及びこれらの結果は国際会議で発表し、その後、雑誌論文に掲載された。

完全独立全域木については、単射的グラフ展開の基グラフにおけるそれらの存在も耐故障性の観点から重要であることから、一般のグラフを対象に考察を進め、頂点数 n が 7 以上の任意のグラフ G と 3 以上 $n/2$ 以下の任意の k に対して、 G の頂点の最小次数が $n-k$ 以上ならば、 G は $[n/k]$ 本の完全独立全域木をもつ、ここで、 $[n/k]$ は n/k 以下の最大の整数を表す、を証明した。これまでに、 G の頂点の最小次数が $n/2$ 以上ならば G は 2 本の完全独立全域木をもつことが知られていた (T.Araki, Dirac's condition for completely independent spanning trees, J.Graph Theory 77 (2014) 171-179) が、そ

の結果は本研究結果での $k=[n/2]$ に相当しており、本研究結果は既知結果を大幅に一般化したといえる。また、頂点数 n が 8 以上の任意のグラフについては、2 つの完全グラフから 1 つの頂点を同一視して得られるグラフを除き、 G の頂点の最小次数が $(n-1)/2$ 以上ならば G は 2 本の完全独立全域木をもつことも証明した。この結果は上記既知結果を、ある特殊なグラフを除けば改善できることを示している。さらに、2 つのパラメータ n, k (k は 2 以上で n は k 以上) に対して、頂点数 n で、 $2[n/k]$ -正則あるいは $(2[n/k]+1)$ -正則なグラフで $[n/k]$ 本の完全独立全域木をもつグラフの構成方法を与えた。このグラフは対称性の高いグラフであり、また完全独立全域木の数に関して最適なグラフとなっていることから、単射的グラフ展開の基グラフだけでなく、それ自体相互結合網として適用可能であると考えている。これらの完全独立全域木に関する結果は国際会議で発表した。

単射的グラフ展開の基グラフとして、木、輪、単輪グラフといった疎なグラフの冪を想定し、それらの k 乗における完全独立全域木について考察し、完全独立全域木の最大数の下界を与えた。特に、輪の k 乗に関しては、頂点数を k で割ったときの余りが 0 と 1 の場合には完全独立全域木の最大数を決定した。また、単輪グラフの 2 乗には 2 本の完全独立全域木が存在することを示したが、これは 2 連結グラフの 2 乗には 2 本の完全独立全域木が存在するという既知結果(論文は先の完全独立全域木の既知結果と同じ)を強化したものになっている。これらの結果は国際会議で発表した。

(4) 各種彩色及びラベリングに関する結果

反復細分線グラフ $\chi(G)$ の点彩色数、最大次数が偶数のときの辺彩色数、最大次数が奇数のときの全彩色数を決定した。また、最大次数が奇数のときの辺彩色数、最大次数が偶数のときの全彩色数が決定されるための十分条件を与えた。さらに、反復細分線グラフの $L(1,1)$ -ラベリング数と $L(2,1)$ -ラベリング数の上界を与えた。これらの結果は国際会議では発表した。特に、これらの結果を得る際に、反復細分線グラフの正準ラベリングと交換ラベリングを新たに導入したが、この 2 つのラベリングは反復細分線グラフにおける基本的なラベリングであり、各種彩色以外にも応用可能であると考えている。

(5) キューレイアウトに関する結果

反復細分線グラフの本型埋め込みに必要なページの最小数(ページナンバー)は細分線グラフ演算の適用回数に無関係な上界をもつことが知られているが、本型埋め込みの双対的なレイアウトである、キューレイアウト

トに関しては同様な上界が存在するかどうかは未解決のため考察を行ったが、その考察過程で真三角化カクタスのグラフ族に対してはキューレイアウトに必要なキューの最小数(キューナンバー)を求める問題が線形時間で解けることを証明することができた。この結果は国際会議で発表した。特に、第2パラメータが3のシェルピンスキーグラフは三角化カクタスに近い構造をもつことから、本結果をさらに発展させ、反復細分線グラフの結果へと進展させることが今後の課題である。

(6) 広域 h-連結防衛 t-同盟に関する結果

広域 h-連結防衛 t-同盟は、広域防衛同盟という支配集合の一種を、連結度の観点と耐故障性の観点から一般化した概念で、本研究で新たに導入したものである。シェルピンスキーグラフ及び拡張シェルピンスキーグラフに関して、広域 0-連結防衛 1-同盟の最小濃度が決定されていた。本研究では、G の頂点の最小次数を $\delta(G)$ として、 t が $\delta(G)+2$ 以上 $\delta(G)-1$ 以下で、 h が 0 以上 $\max\{0, \lfloor (\delta(G)+t)/2 \rfloor - 2\}$ のとき、任意の 2 以上の n に対して、 $\delta(G)$ の広域 h-連結防衛 t-同盟の最小濃度を決定するための G に関する十分条件(さらに、 t が高々 $\delta(G)-3$ のときは必要十分条件)を証明した。この結果をシェルピンスキーグラフ及び拡張シェルピンスキーグラフに適用することにより、既知結果 (C.-H.Lin, J.-J.Liu, and Y.-L.Wang, Global strong defensive alliances in Sierpiński-like graphs, Theory of Comput. Syst. 53 (2013) 365-385) を含む結果を得ることができる。これらの結果については、まず連結度を考慮しない、すなわち、 $h = 0$ のときについて国際会議で発表し、その後 h が 1 以上の場合について(7)の結果と共に国際会議で発表した。

(7) (h, l) -支配集合に関する結果

(h, l) -支配集合は連結支配集合と外連結支配集合を同時に一般化した概念であり、これも本研究で新たに導入した、ここで $(1, 0)$ -支配集合と $(0, 1)$ -支配集合がそれぞれ、連結支配集合と外連結支配集合に相当する。本研究では、 $h = 0, 1, 2$ に対して l が高々 $\delta(G)-3$ のとき、 $\delta(G)$ の (h, l) -支配集合の最小濃度を決定するための G に関する十分条件を証明した。 $h = 0, l = 1$ のときの本結果をシェルピンスキーグラフ及び拡張シェルピンスキーグラフに適用することにより、既知結果 (S.-C.Chang, J.-J. Liu, and Y.-L.Wang, The outer-connected domination number of Sierpiński-like graphs, Theory of Comput. Syst. 58 (2016) 345-356) が得られる。これらの結果は(6)の結果と共に国際会議で発表した。

(8) 普遍化シェルピンスキーグラフに関する結果

拡張シェルピンスキーグラフと一般化シェルピンスキーグラフを共に含む、より広いグラフ族として、普遍化シェルピンスキーグラフ (universalized Sierpiński graph) (G, n) を新たに導入し、 (G, n) が $(G, n-1)$ の各頂点を G あるいは G の部分グラフで置き換えて構成可能であることを証明した。また、普遍化シェルピンスキーグラフの様々な構造的性質(連結度、ハミルトン特性、各種彩色、因子分解、辺素因子)に関する結果も証明した。これらの結果は国際会議で発表した。特に、均一グラフを基にした普遍化シェルピンスキーグラフは因子分解に関してよい性質をもつことから、超並列計算機の相互結合網の候補になり得ると考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

Hasunuma T., Structural properties of subdivided-line graphs, Journal of Discrete Algorithms, 査読有, Vol.31, pp.69-86, 2015, DOI: 10.1016/j.jda.2015.01.008

[学会発表](計8件)

Hasunuma T., Completely independent spanning trees in the powers of sparse graphs, 40th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2016.12.12-16, Newcastle, Australia.

Hasunuma T., Two generalized variants of dominating sets in subdivided-line graphs, International Symposium on Combinatorial Optimisation 2016, 2016.9.1-3, Canterbury, UK.

Hasunuma T., Constructions of universalized Sierpinski graphs based on labeling manipulations, 9th International Workshop on Graph Labeling, 2016.7.7-9, Krakow, Poland.

Hasunuma T., Minimum degree conditions and optimal graphs for completely independent spanning trees, 26th International Workshop on Combinatorial Algorithms,

2015.10.5-7, Verona, Italy.

Hasunuma T., A linear-time algorithm for the queue-numbers of proper triangulated cacti, 31st European Workshop on Computational Geometry, 2015.3.16-18, Ljubljana, Slovenia.

Hasunuma T., Colorings of iterated subdivided-line graphs, Bordeaux Graph Workshop 2014, 2014.11.19-22, Bordeaux, France.

Hasunuma T., Global defensive t-alliances in iterated subdivided-line graphs, 2nd Gdansk Workshop on Graph Theory, 2014.6.26-28, Gdansk, Poland.

Hasunuma T., Structural properties of subdivided-line graphs, 24th International Workshop on Combinatorial Algorithms, 2013.7.10-12, Rouen, France.

〔その他〕

ホームページ等

<http://pub2.db.tokushima-u.ac.jp/ERD/person/82337/work-ja.html>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

蓮沼 徹 (HASUNUMA TORU)

徳島大学・大学院理工学研究部・准教授
研究者番号：30313406