様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ２ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５３３００２２

研究課題名（和文）実用的な微分フリー最適化アルゴリズムの開発

研究課題名（英文）Development of practical derivative-free algorithms for optimization

研究代表者
久野　誉人（Kuno, Takahito）

筑波大学・システム情報系・教授

研究者番号：００２０５１１３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の主たる成果は，凹関数の最小化問題に対して大域的最適解を生成する２種類の確定的アルゴリズムである．１つは，錘アルゴリズムとよばれるクラスの分枝限定法で，問題の実行可能領域を複数の多面体錘に分割して目的関数の下界値計算を行う．錘の分割規則としてω２分割を新たに提案し，そのもとでアルゴリズムの収束を証明し，実用性を計算実験によって確認した．もう１つは，単体アルゴリズムとよばれるクラスで，実行可能領域を複数の単体に分割して目的関数の下界値計算を行う．単体の分割規則には既存のω細分割やω２分割を一般化してωk-分割を提案し，アルゴリズムの収束証明を行い，その実用性も計算実験によって確認した．

研究成果の概要（英文）：The major results of this research are two deterministic algorithms for solving concave minimization problems to global optimality. The one belongs to the class of branch-and-bound algorithms, referred to as the conical algorithm, which subdivides the feasible set using a number of cones and computes a lower bound of the objective function on each. We developed a new rule for cone subdivision, named w-bisection, and proved the convergence of the algorithm according to it. Our numerical experiments indicated that our new subdivision rule is rather promising. The other is a kind of simplicial algorithm which subdivides the feasible set using simplices and carries out lower-bounding on each. We generalized existing w-subdivision, w-bisection, and proposed w-k-section. Under this simplex subdivision rule, we proved the convergence of the algorithm, and implemented numerical experiments, which demonstrated an advantage of w-k-section compared with other existing subdivision rules.

研究分野：数理最適化

キーワード：数理計画法　非線形最適化　大域的最適化　最適化アルゴリズム　分枝限定法

１．研究開始当初の背景

強力な商用ソルバーの普及に伴い，線形計画問題や凸２次計画問題はもちろん，数千変数規模の整数計画問題までが様々な分野で日常的に解かれるようになった．しかし，非線形最適化では，目的関数に関する情報が乏しく，関数値しか評価できないような場合，たとえ小さな規模の問題であっても大域的最適解はおろか局所最適解さえ計算が困難である．そうした状況では，関数値の評価に多大なコストがかかることもまれでない．この種の一般に微分フリー最適化と呼ばれる問題に共通するのは，

- 目的関数の微分情報が利用できない；
- 目的関数の値は評価できるが，そのためのコストが大きい；
- 変数の数は少なく，高々100 程度；
- 制約条件は，上下限制約などで単純

である点であり，代表的なアルゴリズムとして Nelder-Mead のシンプレックス法をあげることができる．開発からすでに半世紀が経過したものの，仕組みが簡単なこともあって，化学工学や薬学などの分野では現在も定番の数値解法である．その一方，収束性など理論的な側面が議論されるようになったのは 90 年代の後半からにすぎず，総括的な教科書が初めて刊行されたのも 2009 年のことである．

２．研究の目的

前述の特徴をもつ非線形最適化問題を解くために，目的関数の微分情報を用いない大域的最適化アルゴリズムを開発する．しかし，局所最適化とは違って，出力される解の大域的最適性を保証するには問題に対する何がしかの仮定が必要になる．目的関数に凸性を仮定すれば，局所最適解が大域的にも最適となることはよく知られており，微分フリー最適化の分野では十分な成果がすでに得られている．そこで，本研究では，目的関数が凸ではないことを仮定し，特に凹関数の最小化と，本質的には同じことであるが，凸関数の最大化を中心に，実用的な大域的最適化アルゴリズムの構築をめざした．具体的には，以下の最適化問題の大域的最適解を求めるための確定的アルゴリズムの開発である：

$$\text{(P1)}\left|\begin{array}{ll}\text{最小化} & f(\boldsymbol{x})\\ \text{条　件} & \boldsymbol{x}\in D,\end{array}\right.$$

あるいは

$$\text{(P2)}\left|\begin{array}{ll}\text{最大化} & g(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})\\ \text{条　件} & \boldsymbol{x}\in D.\end{array}\right.$$

ここで，fは凹関数，Dは凸集合を表すが，簡単のため，適当な大きさの行列$\boldsymbol{A}$とベクトル$\boldsymbol{b}$によって次のように凸多面体で与えられるものとする：

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\, x \le \boldsymbol{b}\}$$

３．研究の方法

先にも述べた通り，問題(P1)と(P2)は本質的に同じであるが，これらを大域的に解くためのアルゴリズムとして，錘アルゴリズムと単体アルゴリズムの２つのクラスの分枝限定法を構築した．

(1) 錘アルゴリズム

関数fの実数αに対する上位準位集合を

$$C(\alpha) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | f(\boldsymbol{x}) \ge \alpha\}$$

と表すことにすると，問題(P1)の最適解$\boldsymbol{x}^*$は次の d.c.（difference of two convex set）実行可能性問題を所与の許容誤差$\varepsilon \ge 0$に対して解くことで求められることが知られている：

(DC): 点$\boldsymbol{x} \in D \setminus C(\alpha)$があればそれを求め，なければ$D \subset C(\alpha-\varepsilon)$であることを示せ．

凸多面体Dを定義するシステムが，その非退化な端点$\boldsymbol{v}$において次のように分割されるものとしよう：

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}_B,\quad \boldsymbol{N}\boldsymbol{v} < \boldsymbol{b}_N.$$

ここで

$$\Lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_B\}$$
$$M = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{N}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_N\}$$

と定義すれば

$$D = M \cap \Lambda$$

が成り立ち，$\boldsymbol{v}$はMの内点となる．説明を簡単にするため，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$とすれば，錐$M$の方向ベクトル$\boldsymbol{d}_1,\dots,\boldsymbol{d}_n$に対しする$\gamma$拡張を以下のように定義する：

$$\boldsymbol{q}_j = \mathrm{ext}(\boldsymbol{d}_j) \equiv \theta_j \boldsymbol{d}_j$$
$$\theta_j = \sup\{\theta \mid f(\theta\boldsymbol{d}_j) \ge \gamma\}.$$

これより，

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{q}_1,\dots,\boldsymbol{q}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

としてΛは次のように表される：

$$\Lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} = \textstyle\sum_{j=1}^n \boldsymbol{q}_j\lambda_j, \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}\}.$$

ベクトル$\boldsymbol{q}_j$は線形独立であり，$\boldsymbol{Q}$が正則なので，次の半空間Gは一意に定まる：

$$G = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{e}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x} \le 1\}.$$

また，$G \cap \Lambda$は単体で，その端点$\boldsymbol{q}_j$，$\boldsymbol{0}$はすべて凸集合$C(\gamma)$に含まれるので，次の包含関係が成立する：

$$G \cap \Lambda \subset C(\gamma).$$

したがって，$M \cap \Lambda$がGの部分集合ならば

$$D = M \cap \Lambda \subset G \cap \Lambda \subset C(\gamma) = C(\alpha - \varepsilon)$$

が成り立ち，(DC)は解けたと結論できる．以上の操作が錘アルゴリズムにおける限定操作である．

もしも$M \cap \Lambda$がGの部分集合でなければ点$\boldsymbol{x} \in D \setminus C(\alpha)$が見つかるか，あるいは$\Lambda$を分割して再調査する必要がある．後者の場合，$\Lambda \setminus \{\boldsymbol{0}\}$から適当な方向ベクトル$\boldsymbol{u}$を選択し，$\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \boldsymbol{q}_j$を満たすベクトル$\boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}$に対し

て$J=\{j\mid\lambda_j>0\}$とすれば，Λは$|J|$個の錐

$$\Lambda_j = \mathrm{con}(\boldsymbol{Q}_j),\quad j\in J,$$

に分割され，$\boldsymbol{Q}_j$は以下で与えられる：

$$\boldsymbol{Q}_j = [\boldsymbol{q}_1,\dots,\boldsymbol{q}_{j-1},\mathrm{ext}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{q}_{j+1},\dots,q_n].$$

この結果,

$$\mathrm{int}(\Lambda_i)\cap\mathrm{int}(\Lambda_j)=\emptyset,\quad i\neq j$$
$$\Lambda=\cup_{j\in J}\Lambda_j$$

が成り立つが，この操作が分枝操作となる．

(2) 単体アルゴリズム

単体アルゴリズムの分枝操作では，実行可能集合Dを包含する単体Δを以下のように複数の部分単体に分割する：

$$\mathrm{int}(\Delta_i)\cap\mathrm{int}(\Delta_j)=\emptyset,\quad i\neq j$$
$$\Delta=\cup_{j\in J}\Delta_j$$

限定操作では，各部分単体Δ_j上における関数gの凹包絡関数h^jを求め，$D\cap\Delta_j$でのh^jの最大点$\boldsymbol{\omega}^j$を計算すれば，gの凸性とh^jの線形性から次の不等式が成り立つ：

$$h^j(\boldsymbol{\omega}^j)\ge h^j(\boldsymbol{x})\ge g(\boldsymbol{x}),\ \forall\boldsymbol{x}\in D\cap\Delta_j.$$

したがって，計算途中で得られた(P2)の実行可能な暫定解$\boldsymbol{x}^*$に対して$h^j(\boldsymbol{\omega}^j)\le g(\boldsymbol{x}^*)$が成り立てば，$\Delta_j$には$\boldsymbol{x}^*$よりもよい解が含まれないことがわかり，$\Delta_j$を以降の考察対象から外すことができる．

４．研究成果

錘アルゴリズムも単体アルゴリズムも有限回で終了しなければ，それぞれ以下のような入れ子状の錘や単体の列が生成される：

$$\Lambda=\Lambda_1\supset\cdots\supset\Lambda_k\supset\Lambda_{k+1}\supset\cdots$$
$$\Delta=\Delta_1\supset\cdots\supset\Delta_k\supset\Delta_{k+1}\supset\cdots.$$

ここで，Λ_{k+1}はΛ_kを$\boldsymbol{u}^k\in\Lambda_k$の方向に沿って分割，$\Delta_{k+1}$は$\Delta_k$を$\boldsymbol{u}^k\in\Delta_k$から放射状に分割して得られたものとする．

各kに対してΛ_kは正則行列$\boldsymbol{Q}_k$よって

$$\Lambda_k=\mathrm{con}(\boldsymbol{Q}_k)$$

のように張られる錐で，$\boldsymbol{Q}_k$の各列$\boldsymbol{q}_j^k$は$C(\gamma)$の境界上の点である．錘アルゴリズムにおける限定操作は次の補助問題を解くことによって実行できる：

$$(\mathrm{P1}_k)\left|\begin{array}{ll}\textbf{最大化} & \boldsymbol{1}\,\boldsymbol{Q}_k^{-1}\boldsymbol{x}\\ \textbf{条　件} & \boldsymbol{x}\in D\cap\Lambda_k.\end{array}\right.$$

問題$(\mathrm{P1}_k)$の最適解$\boldsymbol{\omega}^k$は，等価な線形計画問題：

$$(\mathrm{P1L})\left|\begin{array}{ll}\textbf{最大化} & \boldsymbol{1}\,\boldsymbol{\lambda}\\ \textbf{条　件} & \boldsymbol{N}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{\lambda}\le\boldsymbol{b}_N,\ \boldsymbol{\lambda}\ge\boldsymbol{0}\end{array}\right.$$

を解くことで，その最適解$\boldsymbol{\lambda}^k$から$\boldsymbol{\omega}^k=\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{\lambda}^k$として与えられる．この$\boldsymbol{\lambda}^k$を使って次の集合を定義する：

$$\Lambda_k^+=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid\boldsymbol{x}=\Sigma_{j=1}^n\boldsymbol{q}_j^k\lambda_j,\boldsymbol{\lambda}\ge\boldsymbol{0}\}$$
$$J_k=\{j\mid\lambda_j^k>0\}.$$

また，$\boldsymbol{u}^k$方向の射線とG_kの境界との交点を$\boldsymbol{y}^k$で表すことにする．

一方，単体アルゴリズムにおける限定操作は，凹包絡関数h^kを目的関数とする次の補助問題を解くことによって実行できる：

$$(\mathrm{P2}_k)\left|\begin{array}{ll}\textbf{最大化} & h^k(\boldsymbol{x})\\ \textbf{条　件} & \boldsymbol{x}\in D\cap\Delta_k.\end{array}\right.$$

単体Δ_kの端点を$\boldsymbol{v}_j^k, j=1,\dots,n+1,$として,

$$\boldsymbol{d}_k=[f(\boldsymbol{v}_1^k),\dots,f(\boldsymbol{v}_{n+1}^k)]$$
$$\boldsymbol{V}_k=[\boldsymbol{v}_1^k,\dots,\boldsymbol{v}_{n+1}^k]$$

と定義すると，凹包絡関数h^kは線形方程式：

$$[\boldsymbol{c},c_0]\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_k\\ \boldsymbol{1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{d}_k$$

の解$[\boldsymbol{c},c_0]$によって次のように与えられる：

$$h^k(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}+c_0.$$

しかしh^kを陽に求めなくとも,$(\mathrm{P2}_k)$の最適解は,

$$(\mathrm{P2L})\left|\begin{array}{ll}\textbf{最大化} & \boldsymbol{d}_k\,\boldsymbol{\lambda}\\ \textbf{条　件} & \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{\lambda}\le\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{1}\,\boldsymbol{\lambda}=1,\ \boldsymbol{\lambda}\ge\boldsymbol{0}\end{array}\right.$$

を解くことで，その最適解$\boldsymbol{\lambda}^k$から$\boldsymbol{\omega}^k=\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{\lambda}^k$として与えられる．

(1) 錘アルゴリズムに対する主な成果

① 錘アルゴリズムの収束性

問題(P1L)の双対問題は

$$(\mathrm{D1L})\left|\begin{array}{ll}\textbf{最小化} & \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{b}_N\\ \textbf{条　件} & \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q}_k\ge\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{\mu}\ge\boldsymbol{0}\end{array}\right.$$

であるが，この問題の最適解$\boldsymbol{\mu}^k$に対して

$$\|\boldsymbol{\mu}^k\boldsymbol{N}\|\le L,\quad k=1,2,\dots,$$

を満たす定数Lが存在する．このことを用いて次の定理を証明することができる：

定理１． 錐列$\{\Lambda_k\}$では，$\boldsymbol{u}^k\in\Lambda_k^+$に沿って$\Lambda_k$を分割し，$\Lambda_{k+1}$が得られているものとする．このとき，次の等式が成り立つ：

$$\liminf_{k\to\infty}\|\mathrm{ext}(\boldsymbol{u}^k)-\boldsymbol{y}^k\|=0.$$

□

② ω２分割に基づく錘アルゴリズム

集合J_kに含まれる任意の添字対$\{i,j\}$に対し,

$$\boldsymbol{y}_{ij}^k=(\lambda_i^k\boldsymbol{q}_i^k+\lambda_j^k\boldsymbol{q}_j^k)/(\lambda_i^k+\lambda_j^k)$$

とし，線分$[\boldsymbol{q}_i^k,\boldsymbol{y}_{ij}^k]$と$[\boldsymbol{y}_{ij}^k,\boldsymbol{q}_j^k]$の短い方の長さ

$$\delta_{ij}^k=\|\boldsymbol{q}_i^k-\boldsymbol{q}_j^k\|\ \min\{\lambda_i^k,\lambda_j^k\}/(\lambda_i^k+\lambda_j^k)$$

を求める．錐Λ_kの分割方向$\boldsymbol{u}^k$は，$\boldsymbol{y}_{ij}^k$の中でδ_{ij}^kが最大のもの，つまり

$$\{s,t\}\in\arg\max\{\delta_{ij}^k\mid\{i,j\}\in J_k\}$$

によって定まる$\boldsymbol{y}_{st}^k$を用いる．実際に$\boldsymbol{u}^k=\boldsymbol{y}_{st}^k$に沿って$\Lambda_k$を分割すると

$$\Lambda_k^j=\mathrm{con}(\boldsymbol{Q}_k^j),\ j=s,t,$$

の２つに分割され，行列$\boldsymbol{Q}_k^j$は以下で与えられ

る：

$$\boldsymbol{Q}_k^j = [\boldsymbol{q}_1^k, \dots, \boldsymbol{q}_{j-1}^k, \mathrm{ext}(\boldsymbol{y}_{st}^k), \boldsymbol{q}_{j+1}^k, \dots, \boldsymbol{q}_n^k].$$

このω２分割規則に従う錐アルゴリズムの収束性は，いくつかの補題を用いて以下のように示すことができる：

定理 2． 許容誤差を$\varepsilon = 0$とするとき，ω２分規則に従う錐アルゴリズムが終了すれば，点$\boldsymbol{z} \in D \setminus C(\alpha)$が生成されるか, $D \subset C(\alpha - \varepsilon)$であることが示される．終了しなければ，点列$\{\boldsymbol{\omega}^k\}$には$f(\boldsymbol{\omega}^0) = \alpha$を満たす集積点$\boldsymbol{\omega}^0 \in D$が存在する． □

(2) 単体アルゴリズムに対する主な成果

① 単体アルゴリズムの収束性

初期単体Δ上における目的関数gのリプシッツ定数から導出される十分に大きな正数Mを使い，補助問題(P2L)を以下のように緩和する：

$$\text{(P2L')}\quad \left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{d}_k \boldsymbol{\lambda} + M\tau \\ \text{条　件} & \boldsymbol{A} \boldsymbol{V}_k \boldsymbol{\lambda} \le \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{1}\boldsymbol{\lambda} = 1 \\ & \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}, \tau \ge 0. \end{array}\right.$$

この問題もgの$D \cap \Delta_k$上における上界値を与え，その最適解$(\boldsymbol{\lambda}^k, \tau^k)$から求められる$\boldsymbol{\omega}^k = \boldsymbol{V}_k \boldsymbol{\lambda}^k$は(P2)の実行可能解となる．ここで,

$$\Delta_k^+ = \mathrm{conv}\{\, \boldsymbol{v}_j^k \,|\, j \in J_k\}$$

$$J_k = \{j \mid \lambda_j^k > 0\}$$

と定義すると，(P2L')の双対問題

$$\text{(D2L)}\quad \left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{b} + \nu \\ \text{条　件} & \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{A} \boldsymbol{V}_k + \nu \boldsymbol{1} \ge \boldsymbol{d}_k \\ & \boldsymbol{\mu} \ge \boldsymbol{0}, \nu \ge -M \end{array}\right.$$

の最適解$(\boldsymbol{\mu}^k, \nu^k)$から次の補題が導かれる：

補題 3． 次の不等式が成り立つ：

$$\boldsymbol{\mu}^k \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \nu^k \ge h^k(\boldsymbol{x}), \qquad \forall x \in \Delta_k.$$

特に,

$$\boldsymbol{\mu}^k \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \nu^k = h^k(\boldsymbol{x}), \qquad \forall x \in \Delta_k^+.$$

□

この補題などから

$$\| \boldsymbol{\mu}^k \boldsymbol{A} \| \le L, \quad k = 1, 2, \dots,$$

を満たす定数Lの存在が保証され，次の定理が証明できる：

定理 4． 単体列$\{\Delta_k\}$では，$\boldsymbol{u}^k \in \Delta_k^+$から放射状に$\Delta_k$を分割し，$\Delta_{k+1}$が得られているものとする．このとき，次の等式が成り立つ：

$$\liminf_{k \to \infty} |h^k(\boldsymbol{u}^k) - g(\boldsymbol{u}^k)| = 0.$$

□

② ω-p分割に基づく単体アルゴリズム

１回の単体分割で高々$p\ (\le n)$個の部分単体を生成するため,

$$p^k = \min\{p, |J_k|\}$$

として$|P| = p^k$を満たすすべての部分集合$P \subset J_k$に対して以下を計算する：

$$\boldsymbol{u}_P^k = \textstyle\sum_{j \in P} \xi_j^k \boldsymbol{v}_j^k$$

$$\xi_j^k = \lambda_j^k / \textstyle\sum_{i \in P} \lambda_i^k, \quad j \in P$$

このとき，すべての$j \in P$に対して$\xi_j^k > 0$で$\sum_{j \in P} \xi_j^k = 1$が成り立ち，$\boldsymbol{u}_P^k$は$\Delta_k^+$の$(p^k - 1)$次元面の内点となる．さらに,

$$\delta_P = \min\{\| \boldsymbol{v}_j^k - \boldsymbol{u}_P^k \| \,|\, j \in P\}$$

を計算して，この値が最も大きな$\boldsymbol{u}_P^k$を単体Δ_kの分割点$\boldsymbol{u}^k$に選ぶ．この単体分割規則をω-p分割とよぶ.

補題 5． 単体列$\{\Delta_k\}$では, Δ_kの分割点$\boldsymbol{u}^k$がω-p分割によって選ばれているものとする．このとき，次の等式が成り立つ：

$$\liminf_{k \to \infty} |\boldsymbol{d}_k \boldsymbol{u}^k + M\tau^k - g(\boldsymbol{u}^k)| = 0.$$

□

この補題から直ちにω-p分割規則のもとでの単体アルゴリズムの収束性を証明できる：

定理 6． 許容誤差を$\varepsilon = 0$とするとき，ω-p分割規則に従う単体アルゴリズムが終了すれば暫定解$\boldsymbol{x}^*$は問題(P2)の最適解である．終了しなければ，点列$\{\boldsymbol{\omega}^k\}$の任意の集積点$\boldsymbol{\omega}^0 \in D$が最適解である． □

(3) 成果の位置づけとインパクト

錐アルゴリズムでω細分を用いたときのアルゴリズムの収束性は，1998 年に Jaumard と Meyer，1999 年には Locatelli によって独立に証明されており，単体アルゴリズムに対する収束証明は，2000 年に Locatelli と Raber が発表している．したがって，(1)の①や(2)の①に紹介した結果は必ずしも新しい成果ではない．Jaumard と Meyer，Locatelli と Raber よりも 10 年ほど前に Tuy は，$(\mathrm{P1}_k)$の収益ベクトル$\boldsymbol{1Q}_k^{-1}$が有界であればω細分に基づく錐アルゴリズムが収束することを証明しており，その後，単体アルゴリズムに関しても凹包絡関数h^kの係数ベクトルの有界性がアルゴリズムの収束性を保証することを示している．Tuy は，この条件を満たす錐列$\{\Lambda_k\}$や単体列$\{\Delta_k\}$を非退化列と名づけたが，残念ながらω細分によって生成される$\{\Lambda_k\}$や$\{\Delta_k\}$が非退化かどうかは未だ解決されていない課題である．本研究では，補助問題の双対問題を用いたり，目的関数の初期単体上でのリプシッツ連続性を利用することで$\{\Lambda_k\}$や$\{\Delta_k\}$が非退化性に準ずる性質を満たすことを明らかにした．さらに，この準非退化性から錐アルゴリズムや単体アルゴリズムがω細分よりも緩やかな条件のもとでも収束することも示した. これは, 未解決な課題を含む Tuy の証明を完全なものに修正する結果であり，ω細分の拡張の可能性まで示唆している．実際，(1)の②で説明したω２分割は拡張の具体例であり, その一般化が(2)の②のω-p分割である．収束が保証される分割規則は，これまでω細分と単純な２等分しか知られていなか

った．したがって，ω２分割やω-p分割が新たに収束分割規則に加わったことの学術的な意義は大きい．また，ω細分と違って１回の分枝操作で高々定数個の錐や単体しか生成されないため，空間計算量でω細分にまさるだけでなく，ω^kの情報を分割に活用できるため，単純な２等分よりもはるかに優れた計算効率が実現されることも計算実験の結果から明らかになっている．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計４件）

① Igarashi, Y., T.Kuno, and Y.Sano, "On the complexity of the stable marriage problem for restricted instance classes", 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol.1981, 2016, pp.117-126.

② Kuno, T., and T.Ishihama, "A generalization of ω-subdivision ensuring convergence of the simplicial algorithm", Computational Optimization and Applications, 査読有, Vol.64, 2016, pp.535-555.

③ Kuno, T., and T.Ishihama, "A convergent conical algorithm with ω-bisection for concave minimization", *Journal of Global Optimization*, 査読有, Vol.61, 2015, pp.203-220.

④ Kuno, T., and T.Ishihama, "A simplicial algorithm with ω-bisection for concave minimization", 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol.1879, 2013, pp.97-116.

〔学会発表〕（計３件）

① 五十嵐悠，久野誉人，佐野良夫，"入力に制限を与えた安定結婚問題の計算複雑性について"，日本 OR 学会 2016 年春季研究発表会，2016，3/17-3/18，慶応義塾大学矢上キャンパス（神奈川県）．

② Kuno, T., "A convergent subdivision rule for the simplicial algorithm", *Workshop on Equilibrium and Fixed Point Problems Theory and Algorithms* (招待講演), 2014, 8/25-8/26, Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics（ベトナム）．

③ 久野誉人，石濱友裕，"ω-k分割による単体分枝限定法とその収束性"，数理解析研究所研究集会「最適化の基礎理論と応用」，2013，8/29-8/30，京都大学数理解析研究所（京都府）．

〔その他〕

ホームページ等

http://www.cs.tsukuba.ac.jp/~takahito/

６．研究組織

(1)研究代表者

久野　誉人（KUNO TAKAHITO）

筑波大学・システム情報系・教授

研究者番号：00205113

(2)研究分担者

吉瀬　章子（AKIKO YOSHISE）

筑波大学・システム情報系・教授

研究者番号：50234472