

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 3 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25330027

研究課題名(和文) 背後過程と相互作用する待ち行列に関する研究

研究課題名(英文) Studies on queues interacting with their underlying processes

研究代表者

滝根 哲哉 (Takine, Tetsuya)

大阪大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：00216821

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：背後過程と相互作用する待ち行列、特に系が空になると背後過程がリセットされる working vacation をもつ待ち行列モデル、ならびに、系内仕事量に応じて到着率が変化するモデルと等価な待ち客が途中退去する待ち行列モデルに関する研究を行った。前者のモデル群における系内仕事量を表すマルコフ過程に対してアルゴリズム的解析手法を確立した。また、後者のモデル群に対しては、一定時間待たされると途中退去が起こるMAP/M/c+DならびにM/PH/c+D待ち行列モデルの解析法を確立すると共に、最大許容待ち時間が一般の分布に従うM/G/1+G待ち行列モデルにおけるロス率の性質を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：We studied queues interacting with the underlying processes. In particular, we consider queues with working vacations and queues with impatient customers. In queues with working vacations, the underlying process is reset when the system becomes empty, and queues with impatient customers are equivalent to queues with workload-dependent arrivals. As for the former, we established a matrix-analytic method for the workload process corresponding to the case that the underlying Markov chain is reset when the system becomes empty. As for the latter, we accomplished the analysis of MAP/M/c+D and M/PH/c+D queues and revealed various properties of the loss probability in the M/G/1+G queue.

研究分野：待ち行列理論

キーワード：待ち行列 背後過程 相互作用 working vacation 途中退去

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 情報通信ネットワークの分野では、この数年、従来の TCP/IP 単独では実現できなかった、OpenFlow によるフロー単位での経路制御や複数経路の同時使用、コグニティブ無線による適応的帯域割り当て、再配置可能な波長分割多重方式を用いた光アクセス網など、適応的なトラフィック制御手法の実用化が急速に進んでいる。これらの技術に共通する特徴は、ネットワークの輻輳状態や通信サービス品質要求に応じて適応的にネットワーク資源の割り当てや再配分を行うところにある。

(2) 一方、情報通信ネットワークの性能評価技法として位置づけられる待ち行列理論の分野では、情報通信ネットワークで観測されるパケット流が強い時間相関を持つことに触発され、客の到着が背後過程によって変調される待ち行列モデル群が提案された。特に、背後過程のみに注目した場合、それが有限状態マルコフ連鎖をなす待ち行列モデル群に対しては、行列解析法あるいはアルゴリズム的解析手法と呼ばれる、各種の性能評価指標を計算するための数値的に安定した計算アルゴリズムの統一的な導出手法が整備されている。

(3) (1)で述べたような背景を踏まえ、適応的な資源割り当て機構をもつ情報通信システムに対する基本モデルの整備が必須である。数学的に見ると、このようなモデルは背後過程と相互作用する待ち行列モデルと見なすことができる。しかし、未だ、適応的な資源割り当て機構をもつ様々な情報通信システムを包括的に表現できる基本的枠組みは提案されていない。

## 2. 研究の目的

(1) 本研究では、適応的な資源割り当て機構をもつ情報通信ネットワークの性能評価に直接応用可能な、背後過程の状態に依存して客の到着過程やサービス速度が定まる待ち行列モデルに関する研究を行う。過去に考察されてきたこのクラスのモデルの大多数は、背後過程が(待ち行列の状態とは無関係に)マルコフ連鎖を成すと仮定されており、基本的なモデル群に対する統一的な解析手法が知られている。一方、背後過程の状態遷移が待ち行列の状態に依存するモデルにおける数値計算可能な解析的枠組みはほとんど考察されていない。

(2) 本研究では、後者のような、背後過程と相互作用する待ち行列モデルの中でも、特に、情報通信ネットワークの性能評価に直接応用可能なモデル群に注目し、このようなモデル群を統一的に扱うことが可能な解析的枠組みの構築と、それに対する数値計算が可能なアルゴリズム的解析手法の確

立を目的とする。

## 3. 研究の方法

適応的な資源割り当て機構をもつ情報通信システムの性能評価に資する背後過程と相互作用する待ち行列モデルを考察するにあたって、その制御サイクルに注目し、長期間にわたる緩やかな制御を行うモデルと時々状況に応じて実時間で適応的制御を行うモデルに大別し、研究を進めた。

(1) まず、長期間にわたる緩やかな制御を行うモデルの代表例として、系が空になると背後過程がリセットされる working vacation をもつ待ち行列モデルを研究対象に取り上げた。このモデルは、再配置可能な波長分割多重方式を用いた光アクセスネットワークの性能評価モデルとして導入された。このモデルでは、系が空になると working vacation と呼ばれる期間が開始する。working vacation 中に到着した客は、ある処理速度をもつサーバによって順次、処理されていく。もし、working vacation が終了した時点で系が空であれば、新しい working vacation が開始される。一方、working vacation が終了した時点で系が空でなければ、サーバは処理速度を上げることで、系を空にすることを試み、その後、再び系が空になると、新しい working vacation が開始される。このようなモデルに対するアルゴリズム的解析手法の確立を目指した。

(2) 次に、実時間で適応的制御を行うモデルの代表例として、系内仕事量に応じて受付制御が行われるモデルを考察する。このモデルでは、システムに受け入れられることになる客が、到着時の系内仕事量に依存して決まるため、実質的な到着率が系内仕事量に応じて変化するモデルとみなすことができる。この後者のモデルと数学的に等価な、待ち客が途中退去する待ち行列モデルに関する研究を行った。このモデルでは、到着する客毎に許容できる最大待ち時間があり、待ち時間が最大許容待ち時間に達すると、サービスを受けることをあきらめ、系から離脱する。特に、先着順サービスの場合、到着時点における系内仕事量と最大許容待ち時間の大小関係によって、途中離脱するか否かが決定されるため、途中離脱する客を除いた実質的な到着率は、系内仕事量に依存して定まることになる。このモデル群に対して数値計算可能な解析結果の導出を目指した。

## 4. 研究成果

本研究の主な成果は 5. で示す 6 件の雑誌論文にまとめられている。

(1) working vacation をもつ待ち行列モデ

ルにおいて、working vacation 中である時間帯のみを観察した際に得られる disaster を伴う先着順サービス単一サーバ待ち行列モデルを考察した。このモデルでは disaster が起こるとすべての客がシステムから取り除かれ空になる。客の到着と disaster の発生はマルコフ型到着過程 (MAP) に従い、それらは共通の背後過程である有限状態マルコフ連鎖に支配されていると仮定する。客は  $K$  個のクラスに分類され、それぞれのクラスの客のサービス時間はクラスと到着直前ならびに到着直後の背後過程の状態に依存した一般分布に従うこのモデルに対して、まず、はじめに、空の状態までの初到達時間ならびに全稼働サイクルを解析した。続いて、これらを用いて、系内仕事量分布のラプラス・スティルチェス変換に対する二つの異なる表現を導き、両者の間の関係を論じた。さらに系内仕事量分布に関する解析結果に基づいて、待ち時間分布、系内滞在時間分布を解析し、結合系内客数分布を導出した。なお、working vacation 中でない期間におけるシステムの振る舞いは、従来の解析的枠組みを利用すれば求まる。よって、本研究で得られた結果を用いれば、考察対象である disaster を伴う待ち行列モデルの元になっている working vacation をもつ待ち行列モデルの解析が可能である。[雑誌論文]

(2) 待ち行列モデルにおける系内仕事量に相当するレベルと呼ばれる変数と背後過程の状態を表す相と呼ばれる2変数からなる連続時間マルコフ過程を考察した。レベルは非負の実数値を取り、相は有限集合内の値を取る。また、レベルは遷移に左飛び越しが無いと仮定する。この連続時間マルコフ過程は、先行研究において MAP/G/1 待ち行列の系内仕事量過程を一般化することにより導入され、レベルが正であるという条件下における相の無限小生成作用素が既約であるという、強い仮定の下で定常分布が解析されている。本研究では、この仮定を緩和し、レベルが正であるという条件下における相の無限小生成作用素が可約であるモデルへ既存の結果を拡張した。その結果、この連続時間マルコフ過程の解析結果が直接、working vacation をもつ待ち行列モデルに適用できるのみならず、複数のタイプの全稼働期間をもつ MAP/G/1 待ち行列モデルや休暇時間がセミマルコフ過程に従う休暇付き MAP/G/1 待ち行列モデル等が同じ解析的枠組内で統一的に扱うことが可能になった。[雑誌論文]

(3) 最大許容待ち時間が一般分布に従うような、客の途中退去を伴う M/G/1 待ち行列 (M/G/1+G) における途中退去率を考察した。先行研究では、途中退去率が仮待ち時間分布の密度関数によって表現できること、な

らびに仮待ち時間分布の密度関数が第2種ヴォルテラ型積分方程式の形式級数解として与えられることが知られている。本研究では、仮待ち時間分布の密度関数の形式級数解が、従属する確率変数のランダム和の密度関数と見なすことができることを示し、系内仕事量に依存する呼損率を持つ割り込み再開型後着順サービス M/G/1 待ち行列モデルの解析を通じて、その従属関係を明らかにした。さらに、この結果に基づいて、途中退去率の上下界を導出すると共に、到着率、サービス時間分布、最大許容待ち時間分布の性質によって、途中退去率の大小関係がどのように定まるかについて分析した。また、先行研究では、M/G/1+G 待ち行列モデルの特殊例である M/G/1+M 待ち行列モデル、M/G/1+D 待ち行列モデル、M/M/1+G 待ち行列モデルが個別に解析され、仮待ち時間分布の陽表現が知られている。本研究では、それらの既存結果が本研究で導出した仮待ち時間分布の結果を用いると容易に導くことができること、ならびに、これらの特殊例において陽表現が導出可能な理由を明らかにした。[雑誌論文]

(4) (3) で考察した M/G/1+G 待ち行列モデルにおける途中退去率の性質をさらに深く考察した。(3) では、平均サービス時間が同一である場合、凸順序の意味でサービス時間が大きくなると途中退去率が増加することが示されている。この結果、同じ到着率、同じ平均サービス時間、同じ最大許容待ち時間分布をもつ M/G/1+G 待ち行列モデル群において、M/D/1+G 待ち行列モデルが最小の途中退去率を持つことが直ちに導かれる。本研究では、さらに、excess wealth order の意味で最大許容待ち時間分布が大きくなると途中退去率が増加することを示した。さらに同じ平均値をもつ分布の中で一定分布が excess wealth order の意味で最小であることを示した。すなわち、同じ到着率、同じサービス時間分布、同じ平均最大許容待ち時間をもつ M/G/1+G 待ち行列モデル群において、M/G/1+D 待ち行列モデルが最小の途中退去率を持つことがわかる。これらの結果を組み合わせることで、同じ到着率、同じ平均サービス時間、同じ平均最大許容待ち時間をもつ M/G/1+G 待ち行列モデル群において、M/D/1+D 待ち行列モデルが最小の途中退去率を持つことを示した。[雑誌論文]

(5) 一定の最大許容待ち時間をもつ2種類の複数サーバ待ち行列を考察した。一つ目のモデルでは、客の到着はマルコフ型到着過程に従い、指数分布に従うサービスを仮定する (MAP/M/c+D 待ち行列モデル)。先行研究において、このモデルの仮待ち時間分布が解析され、仮待ち時間分布のベクトル密度関数が2次の連立常微分方程式の解と

して定式化され、その解がトラヒック強度が1であるか否かによって場合分けされた上で導出されている。さらに、その結果を用いて途中退去率や実待ち時間分布が導出されている。本研究では、この先行研究の結果をトラヒック強度の値に依らない、統一的な結果へと洗練した上で、系内客数分布を導出した。また、これらの性能指標の数値計算法を確立した。続いて二つ目のモデルである、客の到着がポワソン過程に従い、サービス時間が相型分布に従うM/PH/c+D 待ち行列モデルを考察し、拡張された経過待ち時間分布のベクトル密度関数が満たす2次の連立常微分方程式を導出し、その解を求めた。さらに、途中退去率、待ち時間分布ならびに系内客数分布を導出すると共に、その数値計算法を確立した。[雑誌論文 ]

(6) (5) で考察した MAP/M/c+D 待ち行列モデルと M/PH/c+D 待ち行列モデルの解析結果から、これら二つのモデルが双対な関係にあることが明らかになった。それゆえ、MAP/M/c+D 待ち行列モデルの特別な場合である PH/M/c+D 待ち行列モデルと M/PH/c+D 待ち行列モデルの特別な場合である M/PH/1+D 待ち行列モデルも双対な関係にあることが分かった。さらに、先行研究において、M/PH/1+D 待ち行列モデルは、それを一般化した M/PH/c+D 待ち行列モデルと比較して、格段に単純な仮待ち時間分布をもつことが知られている。それ故、M/PH/1+D 待ち行列モデルと双対な関係にある PH/M/c+D 待ち行列モデルにおいても、それを一般化した MAP/M/c+D 待ち行列モデルと比較して、格段に単純な解を持つことが予想される。本研究は、この予想が正しいことを示し、PH/M/c+D 待ち行列モデルの仮待ち時間分布が行列指数形式で与えられること、ならびに、その行列指数部がモデルを規定するパラメタで陽に与えられることを示した。[雑誌論文 ]

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6件)

Y. Inoue and T. Takine, The FIFO Single-Server Queue with Disasters and Multiple Markovian Arrival Streams, Journal of Industrial and Management Optimization, vol.10, no.1, pp.57-87, January 2014. 査読有.  
DOI: 10.3934/jimo.2014.10.57

Y. Inoue and T. Takine, An Extension of the Matrix-Analytic Method for M/G/1-Type Markov Processes, Journal of Operations

Research Society of Japan, vol.58, no.4, pp.376-393, October 2015. 査読有.

DOI: 10.15807/jorsj.58.376

Y. Inoue and T. Takine, Analysis of the Loss Probability in the M/G/1+G Queue, Queueing Systems, vol.80, no.4, pp.363-386, August 2015. 査読有.

DOI: 10.1007/s11134-015-9449-7

Y. Inoue and T. Takine, The M/D/1+D Queue Has the Minimum Loss Probability among M/G/1+G Queues, Operations Research Letters, vol.43, no.6, pp.629-632, November 2015. 査読有.

DOI: 10.1016/j.orl.2015.10.003

K. Kawanishi and T. Takine, MAP/M/c and M/PH/c Queues with Constant Impatience Times, Queueing Systems, vol.82, nos.3-4, pp.381-420, April 2016. 査読有.

DOI: 10.1007/s11134-015-9455-9

K. Kawanishi and T. Takine, A Note on the Virtual Waiting Time in the Stationary PH/M/c+D Queue, Journal of Applied Probability, vol.52, no.3, pp.899-903, September 2015. 査読有.

DOI: 10.1239/jap/1445543855

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

滝根 哲哉 (TAKINE, Tetsuya)

大阪大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：00216821