

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 5 日現在

機関番号：62603

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25330050

研究課題名(和文) 自然な歪みをもつ非対称分布の開発と金融工学への応用

研究課題名(英文) Skew-symmetric distributions with natural skewness and their applications to financial engineering

研究代表者

藤澤 洋徳 (Fujisawa, Hironori)

統計数理研究所・数理・推論研究系・教授

研究者番号：00301177

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：非対称な分布の代表は歪対称分布である。この分布は30年も前に提案され、代表としての地位はそのままである。しかしながら、歪度パラメータと呼ばれているものを増やして行っても、尤度が必ず増加するわけではないという奇妙な問題点が内在している。その問題点は長らくそのままであった。そのような奇妙さを克服して、自然な歪度パラメータをもつ非対称分布を構築した。その多次元化も成功した。非対称分布を利用したモデルに基づいたシミュレーションを簡単に行えるように、乱数が効率的に発生できるような手法を開発した。パラメータ推定アルゴリズムについては、ようやく良いアイデアが浮かび、現在でも研究を継続している。

研究成果の概要(英文)：A typical asymmetric distribution is a skew-symmetric distribution. It was proposed about 30 years ago, but it still remains to be representative. However, it includes a well-known drawback; when the skew parameter increases, the skewness does not always increase. To overcome this drawback, we have constructed a novel asymmetric distribution with a natural skew parameter and extended it to a multivariate case. We have also proposed a method for effectively generating random numbers. We are now considering a parameter estimation algorithm.

研究分野：統計科学

キーワード：非対称分布 金融工学 自然な歪み

1. 研究開始当初の背景

【非対称分布の研究】

統計分布としては正規分布をはじめとして様々な分布が存在する。しかしながら、左右非対称な分布でハンディなものは、実はそれほど多くはない。すぐに思い浮かぶのはガンマ分布を対数変換したものである。しかしながら、そのようにアドホックに作られたものは、左右非対称性を表す歪度パラメータが平均パラメータや尺度パラメータに依存し過ぎていて、歪度の役割がはっきりしないままに終わってしまう。

歪度パラメータの役割がはっきりしている分布としては Azzalini (1985) の歪対称分布が有名である。左右対称の分布に、歪度のファクターを非常にうまく導入しており、また、その汎用性は目を見張るものがあった。そのため、この分布は、非常に多方面で使われている。

【最近の進展】

21 世紀に入ってから、非対称分布の研究は本当に盛んになっている。コンピュータの発達によって、より複雑なモデルも扱うことが可能になり、歪みもきちんと考慮に入れようという意識の現れもあると考えている。

そのような中で、Jones (2009) が、Azzalini のアイデアとは全く違う画期的なアイデアを提案した。Azzalini のアイデアが掛け算だとすれば、Jones のアイデアは伸縮である。ある種の単純な変換(伸縮)を考え、その変換にある種の簡単な制約を入れることで、歪対称分布よりも自然な非対称分布を構成することに成功したのである。

Azzalini の分布は、分布の柔軟性に関しては申し分なかったが、歪度パラメータの変化に関して分布の歪み方が必ずしも一様ではなく、さらに、単峰性が壊れてしまうことがあるなど、奇妙な振る舞いをすることもあることが知られていた。Jones の分布は、Azzalini の分布と違って、単峰性を常に保証できる。これが最大の長所である。しかしながら、歪度パラメータの変化に対する単調性などが、必ずしも自然ではなかった。

【申請者の研究】

申請者は、阿部俊弘先生と、歪度パラメータをどのように導入すれば、歪度に関する自然な単調性が保証されるのかを研究した。最近になって、非常に簡単な十分条件を与えることに成功した。特に、Jones のアイデアと違う点は、モード不変性を導入したところにある。その結果として、歪度に関する単調性を自然に保証することができるようになった。我々の結果によって、Azzalini の分布の二つ目の大きな問題点も克服され、自然な歪度をもつ柔軟な非対称分布を作ることが簡単になった。

我々は、さらに、その十分条件を満たすような非対称分布の作り方のレシピも与えた。そのレシピは非常に単純である。これは、十分条件を、非常に簡単にすることができたためである。Jones の論文では、変換の作り方に関しては、アドホックさを頼るところがあったのだが、我々のレシピを使えば、欲しい性質をもつ非対称分布をほぼ自動的に簡単に構築できるようになった。

2. 研究の目的

【非対称分布の多次元化】

これまでは、非対称分布の多次元化となると、かなりアドホックであった。しかし、我々のアイデアは、一次元においては、非常に単純な部分にまで落とせているので、多次元化をアドホックにではなく自然な形で実行することが可能ではないかと考えている。また、乱数の発生方法に関しても、ハンディなアルゴリズムを構築したい。

【パラメータ推定】

非対称分布はパラメータの推定に難しさを含むことが多い。歪度パラメータに関しては取り扱いが難しく、特に、多次元においては、まだまだ発展途上と言ってよいであろう。そこで、分布のきれいさに着目したハンディなパラメータ推定法を構築したいと考えている。

【金融工学のコピュラへの応用】

多次元非対称分布の応用先として、特に、金融工学におけるコピュラへの応用を、念頭に置いている。金融データでは様々なタイプのコピュラが求められている。データがもとも非対称分布に従っていると考えられる場合は相性が良いのではと考えている。

【研究の特色や独創性および予想される結果と意義】

自然な歪度をもつ多次元非対称分布はこれまでに開発されていない。この問題に関しては Jones と直接に議論したこともあるので間違いない。もちろん、それに対応した乱数発生やパラメータ推定法なども構築されていない。そういう意味で独創的である。特に、非対称分布は、アドホックに提案されることが多く、我々の研究成果によって、アドホックさから、ある種の自然さを重視する観点へと、研究全体に一つの方向性を与えてみたい。

3. 研究の方法

平成 25 年度

【多次元化】

一次元における歪度の指標としては、奇数次モーメント、特に、3 次モーメントの利

用が一般的である。モーメントが存在しない場合の歪度の指標も分布関数に基づいて提案されている。しかしながら、これらの指標は、分布全体を見た総合的な指標であるため、分布の歪み方が自然でなくても、それらの歪度が単調に増えたり減ったりする。実際に、Azzalini の歪対称分布は、歪度パラメータの変化に応じて、分布が少し奇妙な歪み方をするが、奇数次モーメントに関しては単調に増えていく。

そこで、Critchley and Jones (2008) は、分布を単峰に限ることによって、厳しい歪度の指標を与えた。分布を単峰に限ることで、人間が自然に感じる歪度を定義しようとした訳である。その歪度を単調に変化させる非対称分布の構築を、一次元においては、ある程度のレベルで成功させたのが、Jones (2009) であった。

しかしながら、Jones のアイデアも、最終的に分布を提案する段階ではアドホックさに頼ることになっていた。そこで、我々は、ある理論を作った。その結果として、最後までアドホックさなしに、欲しい性質をもつ非対称分布を、ほぼ自動的に作れるレシピを提案することに成功したのであった。

多次元化に関しては、Critchley and Jones (2008) の著者の一人である Jones とも議論したことがあるが、彼らの多次元における歪度の指標と、Jones のアイデアとの関係ははっきりしていないようである。

しかし、申請者には、腹案がある。一次元正規分布を多次元に拡張するときのテクニックのうちの一つを援用するのである。正規分布からの独立な変数を多次元変数と考えて、それから相関を入れることで、多次元正規分布ができる。そこで、相関を入れる前に、それぞれに対して伸縮に基づく変換を行って歪みを導入して、その後相関を入れるのである。この多次元分布は一次元分布の自然な拡張になるだろう。この分布は、何らかの歪度を自然に増やすと考えられるので、かりに Critchley and Jones の論文の中に対応する尺度がないのであれば、新しい歪度の尺度を作れば良いと考えている。

ただし、このアイデアでは、歪度に関するパラメータは、多次元変数の数までしか入れられない。Azzalini の歪対称分布の多次元へのアドホックな拡張でも、歪度パラメータの数は同数なのだが、アドホックさを忘れれば、もっとたくさんの歪度を自然に入れられるかもしれない。Critchley and Jones (2008) を参考にしながら、さらに突き詰めてみたいと考えている。

本申請研究においては、今回の申請研究の基となる Fujisawa and Abe (2012) の共著者である阿部俊弘先生と、これからも連携を密にしたいと考えている。現在でも会合をもって議論したりしている。多次元化に関しては多次元分布に詳しい二宮嘉行先生から色々とコメントをもらいたいと考えている。

平成 26 年度以降

【パラメータ推定】

統計モデルの多次元化において問題となるのは、モデルに融通性が効けば効くほど、パラメータの推定が難しくなるという点である。一次元の歪対称分布の場合は幾つかの方法は提案されているが多次元への拡張はそのままは行かないであろう。本申請研究では、自然な歪みをもつ非対称分布を作るので、その自然さを有効利用してハンディなパラメータ推定法を作りたいと考えている。

【乱数発生】

非対称分布の応用先としては、データへのフィッティングとともに利用頻度が高いのが、対称分布のもとで作られた方法が、もしも非対称分布だったときに、どれだけの頑健性があるかという検証の時である。そのためには乱数発生が必要である。一次元の時はずで提案されているが、多次元の時にもハンディな乱数発生法を作りたい。

【コピュラ】

コピュラは定義がはっきりとしているので、多次元分布がありさえすれば、数学的には幾らでも提案できる。ただし、実データに合うようなコピュラが作れるかどうかは、別問題である。正規分布から作られる単純な正規コピュラは、ハンディなのでよく使われたが、実データに合っていなかったために、結果的に失敗も大きかったというのは、良く聞く話である。特に、これまでは、対称分布に基づいたコピュラばかりで、実データは歪んでいたりするのだから、それに応じたコピュラも必要だろうと考える。

【データ解析】

申請者は、少し前の統計数理研究所でのオープンハウスで、某民間研究所の研究者から、我々の分布を使ってある医学データの歪度の経年変化を捉えたいと相談されている。これは、歪度パラメータの解釈が自然だからこそ、そのような研究が可能になる。さらに、某自動車会社のデータ解析を依頼されており、分布に非対称性が含まれているので、非対称性を考慮した解析を考えることになっている。このようなデータ解析を通して非対称分布の有用性をアピールしたり、データ解析の方から新しい視点を組み入れることも視野に入れたい。椿広計先生とは、非対称分布のデータ解析における将来性も議論したことがあり、今後も連携を続けていきたいと考えている。

4. 研究成果

一次元の非対称分布の提案に関しては論文にまとめて雑誌に受理された。多次元の非

対称分布に関しては，自然な歪度をもつ分布の構成に成功し，自然な乱数の発生も可能になり，論文にまとめた．歪度パラメータを増やすとある種の歪度が単調に増加する自然な性質をもつ．乱数も潜在変数を利用した表現が可能であり，容易に乱数を発生できる．パラメータ推定アルゴリズムに関しては，なかなかうまく行かなかったが，余分な潜在変数を導入するアイデアを思いつき，現在でも進行中である．パラメータ推定の問題を考えているときに，当初の研究計画にはなかったが，推定のロバスト化も同時に考え始めた．それも上述のアイデアが有用そうであり，現在でも進行中である．

5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

Fujisawa, H. and Abe, T. (2015) A family of skew distributions with mode-invariance through transformation of scale, *Statistical Methodology*, Vol.25, 89-98, 査読有.

[学会発表](計9件)

- 藤澤洋徳 (2017.3.27) 特別セッション「数理統計研究者と生物統計家の連携について考えよう」: パネリスト, シンポジウム: 「統計科学が切り拓く個別化医療: 方法論・実践のフロンティア」, アクロス福岡, 福岡.
- 金森敬文, 藤澤洋徳 (2016.9.6) ダイバージェンスによる統計的推論, 統計関連学会連合大会, 金沢大学, 金沢.
- 藤澤洋徳 (2016.3.28) 生物データから動機を得た数理統計研究: ロバスト統計・多重検定, 第7回 生物統計ネットワークシンポジウム, 一橋講堂, 東京.
- Abe, T., Fujisawa, H. and Yamaguchi, T. (2014.8.7) A multivariate extension of the skew-unimodal distributions with mode-preserving property, Joint Statistical Meeting, Boston, USA.
- Abe, T., Fujisawa, H. and Pewsey, A. (2014.5.22) A family of skew-symmetric distributions on the circle with unimodality and mode-preserving property, *Advances in Directional Statistics*, Brussels, Belgium.
- Fujisawa, H. and Abe, T. (2014.7.3) A family of multivariate skew distributions with monotonicity of skewness, 3rd IMS-APRM, International Congress Center, Tsukuba.
- 阿部俊弘, 藤澤洋徳 (2014.9.3) 最頻値の位置を変えない非対称分布族の生成, 科研費研究集会「不偏性をはずした時系列推定と因果性の観光統計学への応用」,

奈良女子大学, 奈良.

- 阿部俊弘, Pewsey, A., 藤澤洋徳 (2013.9.10) モード不変性をもつ円周上の非対称分布族, 統計関連学会連合大会, 大阪大学, 大阪.
- Abe, T. and Fujisawa, H. (2013.8.8) A New Family of Unimodal Skew-Symmetric Distributions with Mode-Invariance, Joint Statistical Meeting, Montreal, Canada.

6．研究組織

(1)研究代表者

藤澤 洋徳 (FUJISAWA HIRONORI)
統計数理研究所・数理・推論研究系・教授
研究者番号: 00301177

(2)研究分担者 なし

(3)連携研究者

阿部 俊弘 (ABE TOSHIHIRO)
南山大学・理工学部・准教授
研究者番号: 70580570
二宮 嘉行 (NINOMIYA YOSHIYUKI)
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号: 50343330
椿 広計 (TSUBAKI HIROE)
統計数理研究所・データ科学研究系・教授
研究者番号: 30155436

(4)研究協力者 なし