

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 6 日現在

機関番号：13103

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25350190

研究課題名(和文) 算数・数学における思考の対象の成立を促す学習活動の構築：数量関係領域を中心に

研究課題名(英文) Learning activities facilitating students' constructions of objects of thought in school mathematics: A case of learning on covariational and functional relations

研究代表者

布川 和彦 (Nunokawa, Kazuhiko)

上越教育大学・大学院学校教育研究科・教授

研究者番号：60242468

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、小学校高学年から中学校にかけての数量関係領域の学習について、学習の対象の構成の視点から学習活動の問題点の明確化とその改善のための学習活動の構成とを目指したものである。その結果、教科において目標とする数学的对象を学習者が構成しにくい記述が教科書に見られること、他方で思考の対象に注意した授業では生徒の柔軟な思考が見られること、構成を促すためには教師が授業の中で意図的なディスコースの転換を図り、目標とする対象を対象として扱うようなディスコースに学習者を参加させる必要のあることが示された。

研究成果の概要(英文)： The aim of this study was to identify the critical issues in students' learning and the way of improving of teaching mathematics from the viewpoint of students' construction of mathematical objects, especially in students' learning of covariational and functional relations at 5th to 9th grades. The analysis of mathematics textbooks and the data of mathematics lessons showed that: (a) the textbooks include the descriptions (e.g. the definitions) which can make it difficult for students to construct mathematical objects; (b) teachers need to change the discourses during lessons intentionally so that target mathematical objects are the objects in the new discourses; (c) encouraging students to participate in those discourses is most important for helping them construct mathematical objects; (d) in lessons where objects of thought are rather clear for students, they can think mathematical topics more fluently.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学教育 中学校 関数 数学的对象 ディスコース

### 1. 研究開始当初の背景

多くの研究が行われ、指導の改善も行われてきているが児童・生徒の学習成果が十分なレベルにならない学習内容が見受けられる。数量関係はこうした内容を多く含む領域であり、全国学力・学習状況調査でも課題があるとの指摘がなされることが多い。算数では割合、単位量あたり、比、ともなって変わる量、比例、反比例といった学習が、中学校数学においては関数全般が含まれる。これらは2量の間の関係にある意味で1つの対象としてモノのように扱っていくことが求められる学習である。

これらの指導の改善では、当該内容を理解しやすくなるための工夫が行われてきたが、児童・生徒がそもそも何をしているのかわからないと感じているとの指摘も、指導にあたる教師からされてきた。この「何をしているのかわからない」という声は、そこで扱われている対象が彼らにとって意味のないものになってしまっている可能性を示唆する。つまり、自分が向き合い、探究し、理解をしていく“思考の対象”として、数量関係で学習する数学的概念が成立していない可能性がある。それにより、学習が表象の操作に矮小化され、結果として「何をしているのかわからない」という印象が生まれるのではないかと推測される。

このように児童・生徒のつまづきを定式化し直すと、当該内容をわかりやすく教える工夫を研究することに加えて、数量関係で学習する数学的概念が、児童・生徒にとって“思考の対象”となるような学習活動についての研究も併せて行われることが必要であり、その成果をカリキュラムに組み込むことでさらなる授業の改善が見込めることが予想された。

### 2. 研究の目的

以上のような背景をふまえ、本研究は、算数・数学の学習における児童・生徒の感ずる困難の根本的な原因が、学習の対象である算数・数学の諸概念が“思考の対象”として児童・生徒に成立していないことにあるのではないかとこの前提に立ち、そうした諸概念が児童・生徒にとって自分が向き合い、探究すべき“思考の対象”として成立しやすい学習活動系列のあり方を、特に数量関係領域に焦点を当てて理論的かつ実証的に探究し、我が国のカリキュラムや教科書が児童・生徒にとってより学びやすいものとなるよう、カリキュラムを支える基礎的原理を構築することを目的とした。

児童・生徒の数量関係の学習における困難について、従来とは全く異なる視点から捉え、その上で、学習の大前提となる“思考の対象”の構成という側面にアプローチすることで、数量関係の学習を従来よりもさらに効果的に行えるようなカリキュラム改善の視点を提出できる可能性があり、中学校以後の数学

の学習にとっても、また理工系の研究にとっても重要な数量関係や関数領域での我が国の教育の改善に資することが期待される。

### 3. 研究の方法

本研究は、大きくは3つの柱からなっていた：(1) 図形領域など他の領域での対象化に関する先行研究と数量関係領域の児童・生徒の困難に関わる先行研究の総合的検討から、数量関係領域における“思考の対象”の構成過程についての基本的枠組みを構築するとともに、その観点から現行教科書及び過去の教科書を分析して、現行教科書における問題点を抽出すること；(2) 構築された基本枠組みを小学校高学年や中学校において実施できるような学習活動の形として、あるいは抽出された問題点を改善するような教科書の記述の形として具体化すること；(3) 当該内容に関わり教室でどのような学習過程が生じているか、および考案された学習活動がどのような学習を児童・生徒に引き起こすのかをビデオにより記録し、そのビデオ記録の分析・考察を通して対象の成立に資する学習活動を明らかにすることである。

これにより、“思考の対象”の成立の視点から、カリキュラム改善の知見を得ることができる。

### 4. 研究成果

第1年次には、数学教育学における先行研究、特にファン・ヒーレの思考水準論とスファードによるコミュニケーション行為としての思考という考え方を視点として、わが国の現行の学習を考察した。特にわが国で標準的に使用されている中学校の教科書について、関数の学習がどのように構成されているかを、コミュニケーション行為としての思考や学習のディスコースの観点から検討を加えた。

その結果、中学校の関数領域の学習については、スファードが指摘するディスコースの対象として数学的对象を構成するという視点から見て、そもそも生徒が関数という探求の対象をディスコース的に構成することを困難にする多くの特徴があることが明らかとなった。一つには関数の定義の仕方の問題が見出された。通常、中学校の教科書で数学的对象を定義するに当たっては、「 $x$ の値によって成り立ったり成り立たなかったりする等式を、 $x$ についての方程式という」のように、ある条件を満たす何かとして定義される場合が多い。これによりすでに成立している「何か」の特別な場合として、新たな数学的对象が構成される。しかし関数の場合はこのような定義になっておらず、次のような語り方になっている：「ともなって変わる2つの変数 $x$ 、 $y$ があって、 $x$ の値を決めると、それに対応する $y$ の値がただ1つ決まるとき、 $y$ は $x$ の関数であるという」。関数について「何か」を明示することができないのであれば仕

方がないが、現代化期の教科書との比較により、そうした語り方ができないわけではないのに採用していないことも見出された。こうした定義の語り方が、関数が対象として成立しにくい要因の一つとして推定された。

もう一つには、定義の仕方と関数に関わる活動での関数の語り方の齟齬の問題が見出された。教科書の定義を見ると、「 $y$  は  $x$  の関数である」となっており、従属変数  $y$  が関数であるような語り方になっているが、その後の関数に関する活動においてこの捉え方と整合しない語り方が行われていることが見出された。式について変数  $y$  が変数  $x$  で表されるとする語り方は、 $x$  が決まるとそれで表される  $y$  も決まると解釈でき、定義と接続しやすいが、他方で2変数の関係を示すとする語り方では、現行の関数の定義で変数間の関係に直接触れていないために、式と関数との関係が捉えにくくなる。関数のグラフについても、変数の対  $(x, y)$  を座標上にとるため、 $x$  が決まると  $y$  が決まることとグラフの関係が間接的となり、関数の定義との関係が学習者に捉えにくい語り方になっていることが指摘された。さらに関数を活用する活動でも、活用の効果や活用される場面と関数との関係が、他の単元に比べて曖昧であることが明らかとなった。これらの点についても海外の研究の知見や現代化期の教科書との比較により、ディスコースの対象として関数が構成されにくい学習になっていることが見出された。

これらの知見は、対象の構成に影響を与える問題点が、用いる課題やその配列といったレベルのものだけでなく、教師や教科書が定義や課題をどのように語るか、それによりどのようなディスコースを形成されるかといったレベルの問題点であることを示した。その意味で、知見は現行の教科書に直接関わるものであり、現状を改善するための学習活動の構築について新たな視点が提示されることとなった。また基本的な枠組みに関わり、教科書や教師の語り方による適切かつ統一性のあるディスコースの形成という要素が得られた。

第2年次では、1年次の成果を受けて、現行の関数の学習についての困難点を解消するために、教科書の記述の仕方を、関数が対象として成立しやすいディスコースの形成という視点から改善を試みるとともに、この問題が教科書の記述に留まらず、教室内でのディスコースにも見いだされるのかを検証するため、関数の授業の記録と考察を行った。

前者については、教科書の改善をより具体的に提案するために、中学校関数領域のうち、中学校2年「1次関数」の教科書試案を作成した。作成においては関数が生徒にとっての思考の対象として成立しやすくなることを考慮し、まず定義の仕方を現行のものを尊重しながらも対象を明確にするために修正を行った。具体的には次のように定義をし、対

応関係が関数の利用者により導入されるものであること、およびある種の変数  $y$  に注目し、それが関数であるという立場を明確にした：「『変数  $x$  の値を決めると変数  $y$  の値が1つ決まる』と考えているとき、『 $y$  は  $x$  の関数である』といいます。つまりここでは、別の変数  $x$  により決まる変数  $y$  を関数と呼びます。」これにより学習者が変数  $y$  を関数として対象化し、その特性に注意を向けやすくした。

また関数に関わる活動について語り方の一貫性をもたせ、適切なディスコースが形成されるように記述を行った。具体的には上の定義と整合するように常に変数  $y$  の決まり方や変化の仕方を問題にするようにしたり、ICTの利用を視野に、学習者が変数  $x$  を直接操作することで変数  $y$  を間接的に操作する経験を採り入れた。さらに、変数  $y$  のいくつかの性質の関係を考察することもこのディスコースでは重要な実践であるとする語り方を採用し、ファン・ヒーレの思考水準論で対象化を促すとされる、いわゆる性質の関係網が構築されやすくした。

こうした作成された教科書試案についてはホームページからダウンロードできるようにした。また教科書に組み入れた上述のICTを利用した活動については、これも申請者の作成した動的・相互作用的工作シートのページにリンクをはり、教科書中から直接、その活動のシートへ移動できるようにした。さらに、教科書案を作成する際の基本方針については事後に論文としてまとめ、これもホームページからダウンロードできるようにした。

こうした定義の仕方やICTを利用した活動の一部は、実際の中学校の授業において実践をして頂くことができ、そのビデオ記録を収集した。その考察から、ICTを用いて動的かつ相互作用的な活動を採り入れることにより、数学をあまり得意としない生徒であっても、変数  $y$  の変化の仕方に注意が向き、その特徴について語るようなディスコースが生じやすいことが見出された。

後者については、現行の教科書を利用した中学校2年「1次関数」1単元の授業を、中学校の2クラスにおいて観察し、ビデオに記録した。特にこの授業では、研究協力者の協力を得て、単元の途中に、それまでの学習をもとに1次関数とは何かをまとめる活動を挿入してもらい、そこでの生徒の活動のようすを中心に分析を行うことで、授業で構成される生徒の関数のイメージを捉えようと試みた。分析の結果、多くの生徒は「1次関数とは？」への解答として式の形やグラフの特徴をあげており、従来の研究と同様、関数の表現やそれらの間の翻訳の仕方にそのイメージが留まっていた。ただ一部の生徒ではあるが、変数の関係についてのイメージを教科書にはない自分たちなりの仕方では表現しようとする生徒が見られた。さらに関係の表現を明確化しようとする中で従属変数  $y$  の変化

の仕方が話題となるディスコースがグループ内で形成され、その変数  $y$  の変化の仕方を変数  $x$  やその係数  $a$  とで説明するというイメージを作り出し、それを独自のイメージ図へと総合していった。そのイメージが提示されるとクラスにも受け入れられ、変数  $y$  がディスコースの対象として成立するようすが見られた。この考察を通して、通常の教室のディスコースでは対象としての関数が成立しにくいものの、中学生がある種の対象として関数をとらえる可能性があることが示された。同時に、当初変数  $x, y$  をともに身長と考えていたために、通常の授業でも用いられる「変数が大きくなる」といった語り方が影響を与えた。変数が「大きくなる」「増える」という語り方の問題点が示され、ディスコースでの語り方の重要性が授業レベルでも確認された。また、当初  $ax$  を身長  $x$  の人が  $a$  人と解釈をしていたために、傾きの意味と  $a$  の関係が把握しにくくなった。これは文字式の学習での積の意味づけの仕方がイメージの構成に影響を与えたものであり、他の単元を含めた文字全般に関わるディスコースの形成を考える必要があるという課題のあることを示した。

第3年次はここまでの成果をまとめ・発表するとともに、新たに問題となってきた点を考慮した形での教科書試案の改訂、および通常とは少し異なるディスコースを導入した場合の学習への影響を調査した。

前者については、ここまでの成果を受けて、関数領域を変数により重点を置いた形で再構成することが、関数を思考の対象として成立させるという点からも、また生徒の関数についての理解やその応用の促進という点からも有用であると判断し、前年度に作成していた教科書試案の改訂を行った。具体的には変数が関数であるとする定義に整合することを全体的に徹底し、それに各記述を合わせるよう修正を行った。また、現行の教科書の構成に合わせることをやめ、中学生の学習過程の考察を視野に入れ、単元の構成を大きく変更した。その際に、関数を学習するディスコースではどのような問題意識や意図、探究が重視されるのかを明確にする、関数とその表現との関係をできるだけ明確にすることに注意し、それらの結果として関数の表現の特徴を関数の特徴として読み替えることを意図的に言い、あくまでも探究の対象が関数そのものであるようなディスコースが保たれる語り方に揃えるようにした。例えば、変数  $y$  の変化の仕方がディスコースの中心的话题となるよう、最初に多様な関数をできるだけ探究する活動を設定した。従来は直後の式化を意識し、中学校1年では比例、反比例の場面が中心に扱われたが、これだと変数  $y$  の変化の仕方のヴァリエーションに乏しく、それが話題となりにくい。式化にはこだわらず多様な変化の仕方を取り上げ、それらを比較することで、変数  $y$  の変化の仕方が話題とな

り、それにより変数  $y$  自体が考察すべき対象として成立しやすいと考えたものである。またグラフについても、グラフの形状の特徴から変数  $y$  の変化の仕方を読み取るという語り方を徹底し、それにより変数  $y$  が今のディスコースの対象であり、その  $y$  の特徴が今のディスコースの中心的话题であることが理解しやすいようにした。こうした語り方をすることで変数  $y$  が対象ととらえられ、さらにそこで関数の定義を変数  $y$  に焦点を当てる形の語り方にすることで、関数が対象として成立することが期待しやすいと考えられた。

後者については、研究協力者の協力を再び得て、通常の関数の活用とは異なり、関数を用いて日常場面の問題を自分たちなりに考察、解決するという課題を採り入れた。教科書の活用ではその単元で学習した関数を利用することを前提にした問題が取り上げられるのが普通であるが、ここではそうした制約はなく、自分の知っている関数の知識を用いて自分が取り上げた問題に対してアプローチをすることとなった。この活動に関わる13時間の授業をビデオで記録し、分析を加えた。その結果、生徒たちは活動においてまずは問題と考えた場面における量の変化の仕方に着目し、その変化の仕方の特徴や違いを中心に検討を行っていたことが明らかとなった。例えば、自分の取り上げた場面で2つの変化する量を考え、さらにその変化の速さを異なるものにしたいとの問題意識から比例と2乗に比例する関数を使い分けていた。つまり、2つの関数における変数  $x$  に対する変数  $y$  の変化のスピードに着目した活動を行っていた。また自分たちが希望するような量の変化を表現するために、学習をしていない関数を作り出し、それを式化する生徒もあり、反比例を  $y$  軸方向に平行移動した関数、根号を含む無理関数、指数関数が中学生により作り出された。無理関数は変数  $x$  が大きくなったときに変数  $y$  の増加の割合が小さくなるという変化の仕方を希望する中で作り出され、指数関数は変数  $x$  が1増えるときに変数  $y$  が倍になるという、変化の割合が2乗に比例する関数よりも大きい変化の仕方を場面に採り入れたいとの考え方から作り出された。こうした生徒が何人も見られたことは、変数  $y$  の変化の仕方を中心的话题とするディスコースを形成することで、中学生が従来よりも多様な関数を学習することが可能であること、関数についてかなり柔軟な対応が可能であることを示唆するものであった。

さらに関数を場面に活用する仕方が最初から前提にされている教科書の問題と異なり、生徒たちが考案した活用の仕方なので、その活用の仕方の適切さや、現実場面と理想化された関数との違いなどが生徒たちの話し合いの中で話題となった。これにより、従来の学習で扱われる関数の活用の場面よりも、関数とそれを適用する場面との区別およびそれらの関係を生徒が意識しやすくなっ

たと考えられる。このことも、関数を対象化する点で有効と考えられ、こうした意識化を可能にするという点で、ここで採り入れたディスコースが対象の成立に寄与しうる可能性を示す傍証となった。

ここまでの知見を踏まえながら、他の授業についても考察を行った結果、当該の学習内容が対象として成立するには、授業の中で考察の対象を変更するようなディスコースの変更が必要であり、教師が意図的にそうした変更を行う必要があること、また数学をパターンの科学とする立場に依拠した場合、そうしたパターンに焦点を合わせ、パターンそのものを探究の対象としたり、話題の対象としたりすることが必要であることが、副次的に見出された。こうした知見についても発表を行うとともに、教師向けの書籍においてその知見を反映させることで、本研究の成果を社会に還元するようにもした。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

1. 布川和彦. (2014). 中学校数学における関数の対象としての構成:教科書の考察を中心に. 上越教育大学研究紀要, 33, pp. 85-96. 査読無
2. 布川和彦. (2014). 中学校数学における関数の対象としての構成 (2):教科書の利用場面に焦点を当てて. 上越数学教育研究, 29, pp. 1-12. 査読無
3. 布川和彦. (2015). 関数の対象としての成立を視野に入れた教科書の試案. 上越数学教育研究, 30, pp. 1-12. 査読無
4. 布川和彦, 杉本知之. (2015). 1次関数のイメージの構成に影響を与える要因:中学生のグループ活動の分析を手がかりに. 数学教育学論究(日本数学教育学会), 97, pp. 161-168. 査読有
5. Nunokawa, K., Ohtani, M., & Hiko, K. (2015). Classroom Discourse that Affects Reification of a Mathematical Object: The Case of Function. *Proceedings of ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education*, 7, pp. 425-432. 査読有
6. 布川和彦, 杉本知之. (2016). 中学校3年生により考案された関数の活用の事例:その特徴と生徒のもつ関数のイメージ. 上越数学教育研究, 31, pp. 1-12. 査読無
7. 布川和彦. (2016). 「数学=パターンの科学」の考えを視点とした算数から数学への移行についての考察. 日本数学教育学会誌, 98 (4), pp. 3-14. 査読有

[学会発表](計4件)

1. 布川和彦. 関数の学習における対象の成立に関わる一考察. 日本数学教育学会, 2014年11月8日, 熊本大学.
2. Nunokawa, K., Ohtani, M., & Hiko, K.

Classroom Discourse that Affects Reification of a Mathematical Object: The Case of Function. 2015年5月13日, Waterfront Hotel Cebu City (7th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education).

3. 布川和彦, 杉本知之. 1次関数のイメージの構成に影響を与える要因:中学生のグループ活動の分析を手がかりに. 日本数学教育学会?. 2015年11月8日, 信州大学.
4. 布川和彦. 2016年6月12日, 埼玉大学.
5. Nunokawa, K. Bridging Students' Ideas and Lessons' Goals. 2016年7月27日, Universität Hamburg.

[図書](計1件)

1. 布川和彦. (2016). 生徒の姿から指導を考える. 学校図書.

[その他]

ホームページ等

[http://www.juen.ac.jp/g\\_katei/nunokawa/function/functions.html](http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/functions.html)

#### 6. 研究組織

##### (1)研究代表者

布川 和彦 (NUNOKAWA KAZUHIKO)

上越教育大学・大学院学校教育研究科・教授

研究者番号: 60242468

##### (2)研究分担者

( )

研究者番号:

##### (3)連携研究者

( )

研究者番号:

##### (4)研究協力者

杉本知之 (SUGIMOTO TOMOYUKI)

上越教育大学附属中学校教諭(当時)