2版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号： １２４０１
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2013～2015
課題番号： ２５３８０３８７
研究課題名（和文）金融リスク計測における分散効果の定量的分析

研究課題名（英文）Quantitative analysis on diversification effect for financial risk measurement

研究代表者
丸茂　幸平（MARUMO, Kohei）

埼玉大学・人文社会科学研究科（経済系）・准教授

研究者番号：９０５９６９５９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,100,000円

研究成果の概要（和文）： 金融機関におけるリスク計測への応用を主眼に，直交多項式展開を用いた確率密度関数の推定および近似方法を検討した．直交多項式展開を用いた方法は，これまで精度の問題から実務などへの応用は限られていた．本研究では，精度に問題が生じるような場合を特定し，明示的に示した．また，従来のナイーブな方法で十分な近似精度が得られないような場合にも良好な近似が得られるような，「平滑化」という手法を開発した．
また，制約を課した下での密度関数の推定を行う方法を開発し，数値計算によってその有用性を示した．

研究成果の概要（英文）： We investigated the orthogonal polynomial expansion methods for application to financial risk measurement. So far, the practical use of orthogonal polynomial expansions had been rather limited mainly due to its poor approximation quality. In this project, we clearly stated the condition under which the approximation quality can be poor. Further, we proposed `smoothing' method, with which we obtain fair quality of approximation, even when the naive application of the expansion methods can fail.
We further developed the density estimation methods under constraints, and we verified its utility numerical examples.

研究分野： 数理統計学，金融リスク管理

キーワード： 分布推定　線形制約　ノンパラメトリック統計　エルミート展開　分散効果

1．研究開始当初の背景

金融機関のポートフォリオの価値は，株価や金利の変動や，企業の信用状況の変化など将来における不確実性により変動する．こうしたリスクの精緻な計測は，金融機関自身のみならず，バーゼル銀行監督委員会をはじめとする監督当局にとっても大きな課題といえる．

リスク量を把握するために，Value at Risk や 期待ショートフォールなどの指標が利用されているが，これらにも技術的な問題が指摘されている．これらの問題の多くは，ポートフォリオの損益分布をどのように導出するか，という点に帰着される．

損益分布は通常次のような手順で算出される．たとえば，株価の収益率や金利の変化率など，将来の不確実性をあらわす，リスク・ファクターと呼ばれる変数を考え，これを確率変数として定式化する．すなわち，ポートフォリオが n 個のリスク・ファクターの影響を受けている場合， n 変量の確率変数

$$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)'$$

として定式化する．

次に，リスク・ファクターがポートフォリオの損益にどのように影響するかを定式化する．すなわち，ポートフォリオの損益を Z として，$Z = g(X)$ のように X の関数としてあらわす． Z の分布関数 F_Z は

$$F_Z(x) = P(Z \le x) = P(g(X) \le x)$$

で与えられるので，これから Value at Risk や期待ショートフォールなどのリスク量を算出する．

この手順を，実務において実行するには，次のような技術的な論点がある．1 つ目は，リスク・ファクター $\boldsymbol{X}$ の同時分布をどのように定式化するか，という点で，2 つ目は，$\boldsymbol{X}$ の同時分布からどのように Z の分布を導くか，という点である．これら両方を満足に解決する手法は今のところ得られていないが，実務においては，リスク・ファクターに正規分布を仮定する方法と，経験分布を利用する方法の 2 つが主である(表 1 参照).

	正規分布を仮定する方法		経験分布を利用する方法
呼称	デルタ・ノーマル法 [$g(x)$ を線形の関数で近似]	モンテカルロ法 [擬似乱数を利用]	ヒストリカル・シミュレーション法
長所	・計算が容易	・非線形のリスクも把握可能	・非線形のリスクも把握可能 ・リスク・ファクターの分布の持つ厚い裾の形状も反映したリスク量の算出が可能
短所	・資産分散効果は，リスク・ファクター間の線形相関を通じて表現されるのみ． ・一般に，リスク・ファクターの分布は正規分布より裾が厚いため, リスクを過小評価する傾向.		・観測数が少ない場合リスク量の計測が困難． ・特に，日次より長い期間のリスクを計測する場合観測数の問題が顕現化しやすい．

表 1：リスク計測のために用いられている主な手法

表 1 では市場リスク計測で使われている手法をまとめたが，信用リスクやオペレーショナル・リスクの計測においても同様の問題が存在する．また，カテゴリーごとに計算されたリスク量を合算する方法は，単純な積み上げを行うことが一般的である．こうした，現在使われている手法の問題店を改善した手法を提案することは学術的のみならず実務においても意義が大きいと考えられる．

2．研究の目的

本研究の目的は，１．で挙げた，現在の方法の問題点を改善し，リスク軽減効果の評価を可能にする，ノンパラメトリックな統計的手法を開発することである．市場，信用，オペレーショナルなど，各リスク・カテゴリーについては，リスク・ファクターを表現するためのパラメトリックなモデルがすでに数多く提案されている．しかしながら，リスク量を合算するには，多様なモデルや手法を統一的に扱う必要がある．このためには，多様なモデルや手法によって導かれた分布をノンパラメトリックな方法により近似することが有用である．

より具体的には，分布関数を，直交多項式系を用いて近似し，利用可能な情報により制約を課した分布推定を行うことにより，リスク計測のための手法を開発する．

3．研究の方法

本研究は，理論的な考察と数値計算による手法の確認によって遂行する．中心となる技術は次の 2 つである．すなわち，1 つ目は，パラメトリックなモデルから導出された分布関数や，データから導かれた経験分布などを近似する手法の開発である．2 つ目は，制

約下での分布推定方法である．これは，利用可能な情報を分布推定に課す制約として表現し，リスク計測に反映させるために必要な要素である．

直交多項式系を用いた分布関数の近似は次のように行われる．たとえば，直交多項式系のひとつであるエルミート系による近似は，近似の対象となる分布の密度関数を $f()$ として，

$$f(x) \cong \hat{f}_n(x|\boldsymbol{c}_n) = \phi(x)\sum_{k=0}^{n} c_k \mathrm{He}_k(x) \quad (1)$$

の形の近似を考えることである．ただし，$\boldsymbol{c}_n = (c_0, \dots, c_n)'$ は実数列, $\phi()$ は標準正規分布の密度関数，$\mathrm{He}_k()$ は

$$\mathrm{He}_k(x) = \frac{1}{\phi(x)} \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \phi(x)$$

で定義されるエルミート多項式である．ここでの目標は，(1)式が，何らかの意味で「良い」近似となるように係数 $\boldsymbol{c}_n = (c_0, \dots, c_n)'$ を定める方法を模索することである．

エルミート多項式系は直交性と呼ばれる性質を持っている．すなわち，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\mathrm{He}_k(x)\mathrm{He}_l(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, (k \neq l), \\ 1, (k = l) \end{cases}$$

を満たす．

なお，エルミート多項式系を用いた近似は分布の台が実数域全体の場合に有用であるが，分布の台が上限もしくは下限を持つ場合にはラゲール多項式系が，上下限の両方を持つ場合にはヤコビ多項式系などの直交多項式系が同様に利用できる．

４．研究成果

(1)式の形の近似がこれまであまり活用されてこなかった理由には，精度の悪さが挙げられる．ことに，$n \to \infty$ のときに(1)式の右辺の和が収束しない場合，近似値が n の値に大きく依存してしまい，信頼の置ける近似が得られない．本研究では，近似の対象が

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{f(x)\}^2}{\phi(x)} \mathrm{d}x < \infty \qquad (2)$$

を満たすとき，(1)式の右辺が収束するような係数が

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{He}_k(x)\mathrm{d}x$$

で与えられることを示した．また，このときほとんどすべての x において

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(x) = f(x)$$

が成り立つことも明示した．

これらの事実に注意すれば，目標の分布が(1)式を満たすようなときには n を大きくすることで近似精度が上げられることがわかる．

ことに，リスク・ファクター X の N個の観測値 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)$ が与えられたとき,その経験分布が次のように近似できることを示した．すなわち，$\boldsymbol{x}$ の経験分布は

$$F^N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{\{x_i \le x\}}$$

で与えられるが，これを

$$\hat{F}_n(x|\boldsymbol{c}_n)$$

の形で近似することを考える．本研究では，係数を

$$c_k = \hat{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{He}_k(x_i)$$

としたとき，(3)式の近似が重み付 2 乗差

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{F^N(x) - \hat{F}_n(x|\boldsymbol{c}_n)\right\}^2}{\phi(x)} \mathrm{d}x$$

を最小にすることを示した．また，この近似がほとんどすべての x において

$$\lim_{n\to\infty} \hat{F}_n(x|\hat{\boldsymbol{c}}_n) = F^N(x)$$

が成り立つことも示した．ただし，$\hat{\boldsymbol{c}}_n = (\hat{c}_0, \dots, \hat{c}_n)'$である．しかし，この収束は遅く，また，対応する密度関数の近似

$$\hat{f}_n(x|\hat{\boldsymbol{c}}_n) = \phi(x) \sum_{k=0}^{n} \hat{c}_k \mathrm{He}_k(x)$$

は $n \to \infty$ において収束しない．

本研究では，さらに，近似の目標が(1)式を満たさない場合や，満たしても収束が遅い場合に収束を加速するための平滑化法を開発した．経験分布の近似を例に取ると，平滑化法は次のように説明される．分布関数の近似が

$$\hat{F}_n(x|\boldsymbol{c}_n) = \Phi(x) + \phi(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{\sqrt{k}}\mathrm{He}_{k-1}(x)$$

で与えられるとき，その 2 階微分は

$$\hat{F}_n''(x|\boldsymbol{c}_n) = \phi(x)\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k+1}\,c_k\mathrm{He}_{k+1}(x)$$

となる．x を与えたときの 2 階微分の大きさは，分布関数のその点での曲率を表すので，この値が大きいほど，分布関数がその点で滑らかでないことをあらわしている．分布関数全体の平滑さを知るためにその重み付 2 乗和を考えると，これは

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\{\hat{F}_n''(x)\}^2}{\phi(x)}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}(k+1)c_k^2$$

と計算される．I_1の値が小さいほど，関数 $\hat{F}_n(\cdot|\boldsymbol{c}_n)$ が平滑であると考えることができる．

他方，近似の精度は

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\{F^N(x) - \hat{F}_n(x|\boldsymbol{c}_n)\}^2}{\phi(x)}\mathrm{d}\,x$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(\hat{c}_k - c_k)^2}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\hat{c}_k^2}{k}$$

によって評価することができる．すなわち，I_2の値が小さいほど，$\hat{F}_n(\cdot|\boldsymbol{c}_n)$ が目標とする経験分布関数 $F^N(\cdot)$ に近いと考えることができる．

本研究で提案した平滑化法は，精度をある程度犠牲にして，滑らかな分布関数を得るものである．すなわち，平滑さに対する重み $0 \le \mathrm{q} \le 1$ に対し

$$qI_1 + (1-q)I_2 \qquad (4)$$

を最小にする $\boldsymbol{c}_n$ を考える．この最適化問題は容易に解くことができて，その解は

$$c_k = \hat{c}_k^S = \frac{1-q}{1-q+qk(k+1)}\hat{c}_k$$

で与えられる．

本研究では，このように与えられた係数 $\hat{\boldsymbol{c}}_n^S = (\hat{c}_0^S, \dots, \hat{c}_n^S)'$ を使った近似 $\hat{F}_n(\cdot|\hat{\boldsymbol{c}}_n^S)$ を，平滑化したエルミート展開と呼ぶ．なお，上述のように，平滑化前の密度関数の近似 $\hat{f}_n(\cdot|\hat{\boldsymbol{c}}_n)$ は $n \to \infty$ において収束しないが，平滑化した密度関数の近似 $\hat{f}_n(\cdot|\hat{\boldsymbol{c}}_n^S)$ は収束する．

制約下での分布推定に関しては，以下の成果を得た．T, t をそれぞれ線形な汎関数，既知の定数としたとき，$T(f) = t$ の形で表される制約を線形制約と呼ぶ．このとき，密度関数の近似に対する制約は

$$T\left(\hat{f}_n(\cdot|\boldsymbol{c}_n)\right) = T\left(\phi(\cdot)\sum_{k=0}^{n}c_k\mathrm{He}_k(\cdot)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}c_kT(\phi(\cdot)\mathrm{He}_k(\cdot)) = t \qquad (5)$$

のように表現される．(5)式の中の汎関数部 $T(\phi(\cdot)\mathrm{He}_k(\cdot))$ が既知であることから，(5)式は係数列 $c_0, \dots, c_n$ に関する線形式であることがわかる．たとえば，密度関数の全区間の積分が 1 に等しいという条件，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_n\,(x|\hat{\boldsymbol{c}}_n)\mathrm{d}x = 1,$$

は $c_0 = 1$ と表される．以下，この条件はすべての場合について課されるものとする．

線形制約が $c_0 = 1$ を含めて $m+1$個存在する場合を考える．これらの線形制約は $(m+1)\times(n+1)$実行列 A_n と $m+1$次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ を使って

$$A_n\boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{a} \qquad (6)$$

とあらわされる．

本研究では，(6)式を満たしつつ，(4)式を最小にする $\boldsymbol{c}_n$ を求める問題が，2 次計画問題と呼ばれる問題の一種に帰着できることを示した．この問題は容易に解くことができ，明示的な解は

$$\boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{c}_n^\dagger = (I - P_nA_n)\hat{\boldsymbol{c}}_n^S + P_n\boldsymbol{a}$$

で与えられる．ただし，

$$P_n = D_n^{-2}A_n'(A_nD_n^{-2}A_n')^{-1},$$
$$D_n^{-2} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{1+q}, \dots, \frac{n}{1-q+qn(n+1)}\right)$$

である．さらに，この係数を使った分布関数および密度関数の近似 $\hat{F}_n(\cdot|c_n^\dagger), \hat{f}_n(\cdot|c_n^\dagger)$ がともに $n \to \infty$ において収束することを示した．

実際の金融市場のデータなどを使った例とともに，これらの成果を 5.に示すように纏めた．

5．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

[1] On Optimal Smoothing of Density Estimators Obtained from Orthogonal Polynomial Expansion Methods, K. Marumo and Wolff, R. C., Journal of Risk Vol. 18 No. 3, 47-76. (2016). (査読あり)

[2] Density Approximation with Orthogonal Expansions under Constraints. K. Marumo and Wolff, R. C., 埼玉大学経済学部ワーキングペーパー No. 8, 1-19, (2015). (査読なし)

[3] A Non-parametric Method for Approximating Joint Densities and Copula Functions for Financial Markets, K. Marumo and Wolff, R. C., 埼玉大学経済学部ワーキングペーパー No. 4, 1-47, (2013). (査読なし)

〔学会発表〕（計１件）
[1] Density Estimation with Orthogonal Expansions under Constraints, 丸茂 幸平
第 17 回ノンパラメトリック統計解析とベイズ統計, 2016 年 3 月 29 日 慶應義塾大学三田キャンパス(南校舎 421 教室).

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://sucra.saitama-u.ac.jp/modules/xoonips/detail.php?id=KY-21868611-08-01

http://sucra.saitama-u.ac.jp/modules/xoonips/detail.php?id=KY-21868611-04-01

６．研究組織
(1)研究代表者
丸茂 幸平（MARUMO, Kohei）
埼玉大学・人文社会科学研究科(経済系)・准教授

研究者番号：９０５９６９５９