

平成 29 年 6 月 16 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25381174

研究課題名(和文) スパイラルを重視した数学的活動による中高連携の代数カリキュラムの開発と効果

研究課題名(英文) Development about the Algebraic Curriculum emphasized Spiral Mathematical Activities cooperated with Junior and Senior High School Algebra and its Effect

研究代表者

両角 達男 (Morozumi, Tatsuo)

横浜国立大学・教育人間科学部・教授

研究者番号：50324322

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、スパイラルを重視した数学的活動による中高連携の代数カリキュラムを開発すると共に、そのカリキュラムでの学習効果を質的に考察した。開発した教授単元として、数の拡張に関する正負の数や複素数平面単元、整式の因数分解に関する単元、 $\sqrt{2}$ に限りなく接近する有理数列を探究する単元、円や球の求積公式を導出し解釈する単元などがある。開発した代数カリキュラムにおける、生徒の数学的探究の質的な分析から、多様な学習効果を見いだすことができた。

研究成果の概要(英文)：This research develop the algebraic curriculum emphasized spiral mathematical activities cooperated with junior and senior high school algebra, consider student's mathematical inquiry about school algebra and its effect by qualitative method. In this research we develop several teaching units such as positive and negative integer and complex plane emphasized number expanding, factorizing the polynomial, discovering and proving algebraic property of rational number sequence to come nearer infinite to square root 2, producing and interpreting the mensuration formula about circle and sphere. Various effects find out by student's learning process in these algebraic curriculum emphasized spiral mathematical activities.

研究分野：数学教育学

キーワード：スパイラル 中高連携 数学的探究 代数カリキュラム つながりのある単元 例で考える 質的研究

1. 研究開始当初の背景

生徒が今まで学んだ事柄について「なるほど、そういうことだったのか」と新たな意味形成をしたり「さらにこんなことがいえそうだ」とこれからの学びに向けた洞察をしたりすることを通して、生徒の事象に対する捉えが変容し、その理解が深まる。

例えば、面積2の正方形の1辺の長さとして平方根 $\sqrt{2}$ が導入されることが多い。

ここで、反比例 $y = 2/x$ と比例 $y = x$ のグラフを利用して、面積2の正方形について考えたり、様々な規則性をもつ有理数列の極限として $\sqrt{2}$ について考えたりすることから、 $\sqrt{2}$ の存在を実感することができる。また、等積の長方形から正方形に接近する過程と、 $\sqrt{2}$ に接近していく有理数列の様子を比較したり、その限りなく接近していく様子を式やグラフなどの数学的な表現を用いて解釈したりすることにより、実数としての $\sqrt{2}$ の理解を漸次的に深めることが期待できる。

そこで「新たな意味形成と数学的な洞察との循環」を促す数学的活動によって、中高連携の代数領域の単元を開発すると共に、その単元の授業実践と授業での生徒の学習活動の分析を通して、代数カリキュラムの開発とその効果の特定ができないだろうかと考えた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、「新たな意味形成と数学的な洞察との循環」を促す、スパイラルを重視した数学的活動による中高連携の代数カリキュラムを開発し、そのカリキュラムでの学習効果を考察することである。

3. 研究の方法

研究の目的に向けて、次の3つの方法により考察を進める。

(1) 中学校・高等学校の代数領域でのスパイラルを重視した数学的活動に基づく単元を開発する。さらに、単元どうしのつながりに着目して、中高連携の代数カリキュラムを開発する。

(2) (1)で開発した単元について、研究協力者との協働により、中学校および高等学校で授業実践を行い、授業における質的なデータを収集する。質的研究法を用いて、一連の授業における生徒の学習過程を分析し、学習効果や特徴的な生徒の学習状況を考察する。

(3) 学校代数や数学的活動論に関する先行研究等をもとに、中学校・高等学校の代数領域でのスパイラルを重視した数学的活動に関する理論的な考察を進める。

また、開発したカリキュラムの改善を通して、「新たな意味形成と数学的な洞察との循環」を促すための効果的な学習方法のあり方について考察を進める。

4. 研究成果

(1) スパイラルを重視した数学的活動による「数の拡張」に関する単元開発と、生徒の学習過程の分析による学習効果の特定

本研究を進める上で、スパイラルを重視した数学的活動を「生徒に学んだ事柄に関する新たな意味形成と、これからの学びに向けての数学的な洞察とを繰り返し促す数学的活動」と捉えることとした。また、スパイラルを重視した数学的活動による単元を設計する上で、「例で考えること」や「同じ例に焦点をあてること」等の原理を提示した。

ここで、「例で考えること」には、次の3つの段階があることを指摘した。

a. 例について考える

b. 例を通して考える

c. 例を超えて考える

「例について考える」とは、例そのものや例が何を表しているのかを知るとともに、例に込められた数学的な知識やアイデアを知る段階である。「例を通して考える」とは、例に関わる数学的な知識やアイデアを抽象化したり、一般化したりすることを通して、例に込められた数学的構造を解読する段階である。「例を超えて考える」とは、当初の例に込められた数学的な知識やアイデア、数学的構造の意味を、他の例や、例につながりのある単元の内容との関わりで捉える段階である。ここで、例とは、「生徒に掴ませたいと意図させた数学的構造」が宿された教材、場、活動である。また、生徒が新たな概念を形成したり、既存の概念を変容したりするための、思考のよりどころとしての具体、即ち、生徒にとっての数学的経験、数学的知識、数学に関わる事実も例となる。さらに、生徒がある学習の段階で生成した概念そのものも、抽象化や一般化が進む数学学習の流れの中で、さらなる概念形成のための例となり得る。

「例で考えること」等の単元設計の原理に基づき、「数の拡張」に関わる単元として、中学1年の単元「正の数・負の数」と、高校2年の単元「複素数平面」を開発するとともに、双方の授業実践を比較しながら、授業における生徒の学習過程の分析を行った。ここで、整数の乗法においても、複素数の乗法においても、「被乗数を1とみる解釈」が共通に行われることに着目し、数学的なモデルで「被乗数を1とみる解釈」を行う活動を大切にしながら、乗法の仕方について考える活動を取り入れた。なお、「被乗数を1とみる解釈」そのものは、小学校算数の領域「数と計算」で経験的に重視されている活動である。その活動に、数学的な価値を与えることも意図している。

単元「正の数・負の数」の授業では、2つの整数の乗法を2本の数直線を用いた操作活動で考え、その行為を言葉で表現して対象化することから、正負の数の乗法の意味を解釈する数学的活動が行われた。2本の数直線で「被乗数を1とみる解釈」を行う活動にお

ける生徒の学習過程を質的に分析することから、次のことが明らかになっている。

- ・ 2本の数直線を用いた操作活動とその行為の対象化が、正の数・負の数の乗法の意味解釈を深める。
 - ・ 拡張された数の世界から乗法の意味解釈を見直すことにより、乗法では被乗数を1とみることが重要な役割を果たすことを改めて実感し、統合的な見方を高めることができる。
 - ・ 2本の数直線を用いた操作活動を通して、無限概念につながる洞察を行う可能性が生まれる。
- 単元「複素数平面」の授業では、2つの複素数の乗法を直角三角形のモデルを用いた操作活動で考え、その行為を言葉で表現して対象化することから、複素数の乗法の意味を解釈する数学的活動が行われた。直角三角形のモデルで「被乗数を1とみる解釈」を行う活動における生徒の学習過程を分析することから、次のことが明らかになっている。
- ・ 直角三角形のモデルを用いた操作活動とその対象化が、複素数平面上での複素数どうしの乗法の意味解釈を深める。
 - ・ モデルを用いた操作や観察が、探究の推力となり、これまでの学習を活用したり、関連づけたりする活動につながる。
 - ・ 複素数どうしの加法や減法の図形的な意味を解釈した生徒は、乗法の意味解釈においてもベクトルを意識して探究する。
 - ・ 被乗数を1とみることは生徒にとって容易なことではない。
 - ・ 拡張された数の世界から乗法の意味解釈を見直すことにより、乗法では被乗数を1とみることが重要な役割を果たすことを改めて実感し、統合的な見方を高めることができる。

(2) スパイラルを重視した数学的活動による「式の展開と因数分解」や「式と証明・高次方程式」に関する単元開発と、生徒の学習過程の分析による学習効果の特定

スパイラルを重視した数学的活動による、中学校3年の単元「式の展開と因数分解」、高等学校・数学の単元「式と証明・高次方程式」を開発するとともに、双方の授業実践を比較しながら、授業における生徒の学習過程の分析を行った。ここでは、単元「式と証明・高次方程式」における、整式 $x^n - 1$ の因数分解に関する数学的探究とその様相について述べる。

整式 $x^n - 1$ の因数分解に関する学習は、単元「式と証明・高次方程式」後半の7時間展開で、次の活動1～活動3のように行われている。

活動1： $x^2 - 1, x^3 - 1, x^4 - 1, \dots, x^8 - 1$ の因数分解を行うとともに、因数分解の方法を振り返り、導出した $x^n - 1$ ($n \geq 8$)の規約多項式のもつ規則性を発見する。紙と鉛筆による方法と Computer

Algebra System(CAS)を用いた方法との調和を行い、同じ $x^n - 1$ の因数分解の結果にずれが発生した場合には、式の同値変形(紙と鉛筆による方法)により、そのずれを解消する。

活動2：指数 n が8までの $x^n - 1$ の規約多項式を比較し、 $x^n - 1$ の規約多項式のもつ数学的性質を導く。導いた数学的性質が一般的に成り立つものかどうか、さらなる数学的性質が導けるかどうかについて、CASを用いて調べ、他者と議論を行い、探究する。

活動3：活動2で導いた $x^n - 1$ の規約多項式のもつ性質に焦点をあて、可能な範囲でその代数的な証明を行う。指数 n と整式 $x^n - 1$ との関係に着目して、規約多項式のもつ性質をさらに探究する。

活動1～活動3からなる「整式 $x^n - 1$ の因数分解に関する数学的探究」について、次のことが明らかになっている。

- ・ 帰納的に $x^n - 1$ の因数分解を行い、その行為と所産を振り返ることを通して、整式 $x^n - 1$ を整数 n の特徴に関連づけた探究が促される。
- ・ $x^6 - 1$ の因数分解に対する多様な解釈が、さらなる $x^n - 1$ の因数分解の探究を生むと共に、探究を進めるための素地となる多項式を次々と変えながら、規約多項式のもつ性質の探究を進める。
- ・ $x^n - 1$ の因数分解に関する思考を進めることにより、生徒が証明をしたくなる「証明すべき事柄」の生成がなされる。その証明活動に関しては多様な生徒の動きがみられる。

(3) スパイラルを重視した数学的活動による 2に限りなく接近する有理数列の特徴を探究する学習とその効果の特定

「同じ例に着目すること」の単元設計の原理に基づき、2に限りなく接近する有理数列の特徴を多様な視点から探究する単元を設計し、授業実践を行った。2に限りなく接近する有理数列とは、次の数列 $\{c_n\}$ で表される数列である。

$$\{c_n\}: \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \dots$$

この有理数列 $\{c_n\}$ は、隣接する二つの項の分子および分母に着目すると、きれいな規則を見いだすことができる。

$$\{c_n\}: \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \dots$$

例えば、 $3/2$ の分子と $7/5$ の分母、 $3/2$ の分母と $7/5$ の分子をかけあわせると、 $3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$ という式を得ることができる。この式を $3 \times 5 + 2 \times (-7) = 1$ と読むと、 $3x + 2y = 1$ となる整数解 $(5, -7)$ が存在することにより、3と2が互いに素であるということが出来る。このように、隣接す

る二つの項によって、有理数列 $\{C_n\}$ が既約分数で構成されることを示すことができる。

なお、有理数列 $\{C_n\}$ の初項を、 $4/6$ のように可約分数にすると、同じ規則性をもってつくられる有理数列の各項は可約分数として表現される。

また、有理数列 $\{C_n\}$ の漸化式や一般項は、次の式で表すことができる。

$$C_{n+1} = \frac{C_n + 2}{C_n + 1}, C_1 = 1$$
$$C_n = \frac{\sqrt{2} \{ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \}}{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}$$

有理数列 $\{C_n\}$ は 2 に収束する数列であるが、この漸化式の「式の形」に注目すると、3, 4, 5 などに収束する有理数列をつくり出すことができる。また、有理数列 $\{C_n\}$ には、ある項の分母と分子を足し合わせると隣接する項の分母と等しくなり、隣接する2つの項の分母どうしの和は、一方の項の分子と等しくなる等の性質がある。有理数列 $\{C_n\}$ の各項を2乗した数列にも、興味深い性質が存在する。有理数列 $\{C_n\}$ のもつ性質を参考にして、自然数に接近する有理数列を創り出すと、その中にきれいな数の性質をもつ場合がみられる。

これらの「例」を用いた数学的活動を、数学Aの単元「整数の性質」、数学の単元「数列の極限」で行った。単元「整数の性質」の学習では、次のことが明らかになっている。

- ・生徒は 2 に限りなく接近する有理数列の中に、すべての項が既約分数で構成される数列があることに驚きつつ、「すべて」を示すための、証明すべき事柄の生成に当初困惑していた。
- ・有理数列の隣接二項の差を求める式を変形して読むことと、互いに素に関する性質とを関連づけることができたときに、「すべて」を証明するための、事柄の生成に至ることができていた。
- ・文字式を使って証明をする際に、文字式を新たに文字において、仮定の繰り返しとみて証明を試みること等が、代数的に証明することの意味を問い直すきっかけとなっていた。
- ・文字式を使って証明する方法どうしを比較したり、他者と証明の意味を議論することを通して、文字式を用いた証明の改善を図っていた。

また、単元「数列の極限」の授業実践とその分析を通して、次のことが明らかになっている。

- ・異なる視点からの考察の過程を振り返り、関連づけることを通して、数列の極限を調べる方法を思考の対象とすることが促される。
- ・同じ数に接近する複数の有理数列や漸化式の比較から、その背景にある原理に迫ったり、数列の接近(収束)に関する本質的な

「問い」が生成される。

ここで、本質的な「問い」の例として、有理数列 $\{C_n\}$ の特徴を調べるために、 $\{C_n\}$ の各項を2乗した数列について探究していた生徒の「問い」がある。この生徒は、次の「問い」をあげている。

「でも、本当にその2という値を $(2)^2$ と捉えていいのかはまだ不安なところである。(中略)が、収束する値自体大きくなっているので、大して変わらないかもしれないと思った。」

学校種や学年を超えて、つながりのある単元で、繰り返し「同じ例に着目すること」による授業実践を行うことを通して、生徒の中には、数学の本質に迫る本質的な「問い」が発生する可能性がみられている。同時に、生徒の知識の成長や、数学の体系的な理解につながる、今まで正しいと認めていた事柄への「問い」の発生や、あたりまえと思っていたことの問い直しなどがみられている。

(4) スパイラルを重視した数学的活動による円と球の求積公式を導出する数学的活動とその学習効果の特定

スパイラルを重視した数学的活動による、高等学校・数学の単元「積分法」を開発するとともに、小学校算数で学習した「円の面積公式」、中学校数学で学習した「球の体積や表面積の公式」を、積分を用いて解釈し直す学習を行い、その授業における生徒の学習過程の分析を行った。

「円の面積公式」や「球の体積や表面積の公式」に関する学習は、単元「積分法」の中で、次の活動1～活動4のように行われる。活動1：算数教科書における円の面積公式に関する記述を、数学的な背景を含めて読み込みながら、公式導出の方法を数学的に表現し直し、解釈する。

活動2：円の面積公式を、極限や積分の概念を用いて改めて導出し、解釈する。その解釈の妥当性を議論すると共に、公式導出に必要な数学的な考えを整理する。

活動3：円から球への類比的推論を活かして、球の体積公式を極限や積分の概念を用いて導出する。球の体積公式と円の面積公式とを比較し、公式導出に必要な数学的な考えを整理する。

活動4：活動2や活動3を踏まえ、球の表面積の公式を導出する。また、そこで使われた数学的な考えを整理する。

活動1～活動4からなる「円や球の求積公式に関する数学的探究」について、次のことが明らかになっている。

- ・円の面積公式導出における「対称性に着目する、同心円の集積とみなす、内接する等間隔の長方形の区分を増やす、内接する正多角形の面積から近似する」というアイデアと、円と球との類似性に着目しながら、2次元から3次元への次元の移行とを関連づけて、球の体積公式を導く活動がみら

れる。

- ・前提となる条件を明確にしないと、循環論に陥る事実を知る体験をする。このことを通して、既にわかっている事柄と導出したい事柄とを区別して推論する姿勢が高められた。
- ・球の体積公式を導く過程を数学的に表現し、解釈する活動を促進したのは、円の面積に関する算数教科書を読み込み、その背景にある数学に迫る数学的活動である。これは、小学校算数の内容を、高等学校数学の立場から積極的に学び直す、スパイラルを重視した数学的活動そのものである。スパイラルを重視した数学的活動は、学校種を超えて学び直すことの可能性や価値を与える。
- ・算数教科書の記述やその行間には、数学的な背景を理解して納得することができる内容が多く含まれる。それゆえ、算数教科書の内容を学び直しながら、中学校数学や高等学校数学の内容を関連づけて、一体的な学習指導を組む可能性が豊かにある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

西角達男・荻原文弘(2016)。「 2 や自然数に接近する有理数列とその極限に関する数学的探究」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第22巻, 第2号, pp.197-211. 査読有。

荻原文弘・西角達男(2016)。「円と球の求積公式を導出し解釈する学習過程に関する研究 - スパイラルを重視した数学的活動をもとにして - 」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第22巻, 第2号, pp.11-24. 査読有。

西角達男・荻原文弘(2015)。「整式 $x^n - 1$ の因数分解に関する数学的探究とその様相」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第21巻, 第2号, pp.146-162. 査読有。

荻原文弘・西角達男(2015)。「複素数の乗法を解釈する活動と数の拡張に関する捉えの様相 - 複素数平面で被乗数を1とみる解釈を通して - 」, 日本数学教育学会誌『数学教育学論究臨時増刊』, 第97巻, pp.57-64. 査読有。

西角達男・荻原文弘(2014)。「整式を因数分解する学習過程における式を読む活動」, 第47回秋期研究大会発表収録, 日本数学教育学会, pp.185-188. 査読無。

荻原文弘・西角達男(2014)。「規約多項式がもつ数学的性質を発見し探究する活動」, 第47回秋期研究大会発表収録, 日本数学教育学会, pp.221-224. 査読無。

西角達男・荻原文弘(2013)。「有理数列に関する性質を発見し証明する学習過程と

その様相 - スパイラルを重視した数学的活動を基にして - 」, 日本数学教育学会誌『数学教育学論究臨時増刊』, 第95巻, pp.369-374. 査読有。

荻原文弘・西角達男(2013)。「スパイラルを重視した数学的活動による無理数に関する理解の深化 - 単元「数列」における有理数列の探究過程に着目して - 」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第95巻, 第9号, pp.2-9. 査読有。

荻原文弘・西角達男(2013)。「スパイラルによるユークリッドの互除法を解釈し活用する学習過程とその特性」, 第46回秋期研究大会発表収録, 日本数学教育学会, pp.193-196. 査読無。

[学会発表](計17件)

西角達男・荻原文弘。「平方数の和の積に関する数学的探究とその様相」, 全国数学教育学会第45回研究発表会, 2017.1.28, 広島大学教育学部。

荻原文弘・西角達男。「整数の乗法を解釈する活動と数の拡張に関する捉えの様相 - 単元「比例・反比例」における数学的活動に着目して - 」, 全国数学教育学会第45回研究発表会, 2017.1.28, 広島大学教育学部。

荻原文弘・西角達男。「正負の数の乗法を解釈する活動と数の拡張に関する捉えの様相 - 2本の数直線で被乗数を1とみる解釈を通して - 」, 日本数学教育学会第49回秋期研究大会, 2016.10.30, 弘前大学教育学部。

西角達男・岡本光司。「問い」を軸とした算数・数学授業の深化を促す子どもの活動と教師の動き」, 全国数学教育学会第45回研究発表会, 2016.6.25, 高知大学教育学部。

荻原文弘・西角達男。「ユークリッドの互除法に関する深い学びを促すための学習活動と数学的表現との関係 - スパイラルを重視した数学的活動を基にして - 」, 全国数学教育学会第45回研究発表会, 2016.6.25, 高知大学教育学部。

西角達男・荻原文弘。「 2 や自然数に接近する有理数列とその極限に関する数学的探究」, 全国数学教育学会第43回研究発表会, 2016.1.30, 広島大学教育学部。

荻原文弘・西角達男。「複素数の乗法を解釈する活動と数の拡張に関する捉えの様相 - 複素数平面で被乗数を1とみる解釈を通して - 」, 日本数学教育学会第48回秋期研究大会, 2015.11.8, 信州大学教育学部。

西角達男・荻原文弘。「楕円の極線の方程式を導出し解釈する学習過程に関する研究」, 日本数学教育学会第48回秋期研究大会, 2015.11.8, 信州大学教育学部。

西角達男・荻原文弘。「単元「式と証明」の学習における式を読む活動とその様相」

全国数学教育学会第 42 回研究発表会，
2015.6.14，鹿児島大学教育学部。

荻原文弘・両角達男。「円と球の求積公式
を導出し解釈する生徒の探究に関する研
究」,全国数学教育学会第 42 回研究発表会，
2015.6.14，鹿児島大学教育学部。

荻原文弘・両角達男。「対象化・省察をし
ながら継続的に数学授業を改善する若手
教師の力量形成に関する研究」,全国数学
教育学会第 41 回研究発表会，2015.1.31，
広島大学教育学部。

両角達男・荻原文弘。「整式 $x^n - 1$ の因
数分解に関する数学的探究とその様相」，
全国数学教育学会第 41 回研究発表会，
2015.1.31，広島大学教育学部。

土屋加菜恵・荻原文弘。「ユークリッドの
互除法のアルゴリズムを解釈する学習過
程とその様相」,日本数学教育学会第 47 回
秋期研究大会，2014.11.9，熊本大学教育
学部。

両角達男・荻原文弘。「整式を因数分解す
る学習過程にみられる式を読む活動」,日
本数学教育学会第 47 回秋期研究大会，
2014.11.8.熊本大学教育学部。

荻原文弘・両角達男。「規約多項式をもつ
数学的性質を発見し探究する活動」,日本
数学教育学会第 47 回秋期研究大会，
2014.11.8.熊本大学教育学部。

荻原文弘・両角達男。「スパイラルによる
ユークリッドの互除法を解釈し活用する
学習過程とその特性」,日本数学教育学会
第 46 回秋期研究大会，2013.11.17.宇都宮
大学教育学部。

両角達男・荻原文弘。「有理数列に関する
性質を発見し証明する学習過程とその様
相 - スパイラルを重視した数学的活動
を基にして - 」,日本数学教育学会第 46 回
秋期研究大会，2013.11.16.宇都宮大学教
育学部。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

両角達男 (MOROZUMI TATSUO)

横浜国立大学・教育人間科学部・教授

研究者番号：503234322

(2) 研究協力者

荻原文弘 (OGIHARA FUMIHIRO)

佐久長聖中学・高等学校・教諭