

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 6 日現在

機関番号：10102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25381210

研究課題名(和文) 操作的証明を取り入れた代数的証明の学習環境の研究開発

研究課題名(英文) Research and development of the learning environment of algebraic proof by Operative proof

研究代表者

佐々 祐之 (SASA, HIROYUKI)

北海道教育大学・教育学部・教授

研究者番号：30315387

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：操作的証明を用いた学習環境のデザインについて、理論的枠組みを再検討するとともに、具体的な学習環境のデザインを行い、その効果を検証することができた。また、実証授業を通して「道具的創成」という現象を観察することができ、代数的証明の学習環境のデザインに対して、大きな示唆を得ることができた。また、これまでの研究成果を学位論文としてまとめ、公開することができた。

研究成果の概要(英文)：In this study, I reviewed anew about a design of learning environment of Operative proof. And I designed one specific learning environment, and validated its evidence. Also, in the experimental lesson to consider the effectiveness of the design, I found out the "Instrumental Genesis" through children's activities. This is suggestive about the design of learning environment. Additionally, I organized this research product as an academic dissertation.

研究分野：数学教育学

キーワード：操作的証明 代数的証明 本質的学習環境 算数・数学

1. 研究開始当初の背景

中学校における代数的証明は、第2学年の「文字を用いた説明」の単元で取り扱われる。しかし、同学年の図形領域で指導される「証明」の学習に先行して指導されるため、「証明」としての位置づけが十分ではなく、文字式の変形の部分に焦点があてられているのが現状である。全国学力学習状況調査の結果を見ても、代数的証明に関する問題の正答率は、概ね40%前後であり、一般的に成り立つ数の性質を文字を用いて代数的に証明することの理解は十分であるとは言えない。また、実際に証明が書けている生徒も、なぜ文字を用いるのかといった証明の意義については十分理解しないまま、形式的に文字式の変形を行い、証明を構成しているということも考えられる。

E. Ch. Wittmann は、自身が主宰する数学教育の改革プロジェクト“mathe2000”の活動の中で、形式的証明を学習する以前の段階における理由づけのための手法として、“操作的証明 (Operative proof)”という概念を提唱している。この概念は、もともとは形式的な証明を学習する以前の小学校段階の児童向けに開発されたものであるが、「代表的特殊に対する操作を通して一般に成り立つことを説明する」という操作的証明の特徴は、命題や証明の一般性といった証明することの意義の理解を促進し、形式的証明の学習の導入としての役割を果たすと考えられる。

2. 研究の目的

本研究では、代数的証明の学習指導において、単に形式的な文字式の変形だけではなく、文字を用いることによって保障される証明の一般性の理解にも焦点があてられるように、ドイツの数学教育学者 Wittmann の提唱する“操作的証明 (Operative proof)”という概念を取り入れた学習環境のデザインと開発を行うことを目的とした。また、実証的研究を通してその効果を検証するとともに、“操作的証明”を通常の学習指導において活用していくための具体的方法を検討することも目的として設定した。

上記の目的を達成するための具体的な目標として、以下の3点を設定した。

(1) “操作的証明 (Operative proof)” についての理論的枠組みの構築

E. Ch. Wittmann の提唱する操作的証明の概念を詳細に検討することを通して、先行研究における操作的証明の位置づけを明らかにする。

(2) “操作的証明”を用いた学習環境の開発

代数的証明の学習において、操作的証明をどのような題材において取り入れ、どのような学習活動として展開するのか、ということ考察し、学習環境デザインのための具体的な方法論を確立する。

(3) “操作的証明”を用いた学習環境の検証と活用方法の検討。

実際に開発した“操作的証明”を取り入れた学習環境に関して、附属中学校や公立中学校等の協力を得ながら実証的に研究し、効果を検証する。また、デザインした学習環境を、教員養成段階の学生の学習資料や学校現場の教員が参考にできる資料としてどのように活用していくかを検討する。

3. 研究の方法

本研究では、“操作的証明 (Operative proof)”という概念を取り入れた学習環境のデザインと開発、その効果の検証を目的としており、その目的の達成のため、(1)理論的枠組みの構築、(2)具体的な学習環境のデザイン、(3)学習環境の効果の検証と活用方法の検討、という3つの具体的目標を立てた。これらの具体的目標を達成するため、それぞれ次のような研究方法をとった。

まず、“操作的証明 (Operative proof)”という概念を取り入れた学習環境のデザインのための理論的枠組みの構築に関しては、操作的証明の概念を提唱している E. Ch. Wittmann の先行研究を改めて精査するとともに、中学校第1学年の生徒を対象にした教授実験を実施し、おはじきと位取り表による操作的証明に関する生徒の活動の実態をとらえることを試みた。このことによって、学習者の実態を踏まえた上で、学習環境デザインに必要なとされる条件を明らかにすることができた。

次に、具体的な学習環境のデザインに関しては、教授実験の結果を踏まえ、探究的活動を中心とした操作的証明の学習環境のデザインを行った。教授実験の結果から、おはじきと位取り表を用いた操作的証明では、他者との相互作用が有効に機能することが明らかとなったため、数学的パターンの探究を、他者との相互作用を通して行うことができる学習環境のデザインを試みた。また、探究的な活動を中心とした学習環境であることから、対象を中学生に限定するのではなく、代数的証明の素地的指導の段階である小学校高学年にまで範囲を広げて、学習環境のデザインを試みた。

さらに、デザインした学習環境の効果の検証に関しては、小学校高学年向けにデザインした学習環境による実証授業を実施し、児童の反応を分析した。国内の小学校だけではなく、イギリスの初等学校の児童を対象とした実証授業を実施することによって、学習環境デザインの汎用性を検証することを試みた。

研究成果の活用に関しては、ある程度まとまりをもった研究成果とする必要があるため、本研究期間以前から取り組んでいた研究成果も含め、「論証指導における操作的証明の機能に関する研究」として学位論文にまとめることによって、研究の総括を行った。学術情報リポジトリに学位論文として公表することによって、研究内容を広く公開し、活用が図られるようにした。

4. 研究成果

3年間の研究の成果を、「理論的枠組みの構築」「学習環境のデザインと効果の検証」「研究の総括と活用方法の検討」「今後の課題」という4点に分けて示す。

(1) 理論的枠組みの構築に関する研究成果

本質的学習環境のデザインに関する理論的枠組みの構築に関する成果としては、操作的証明の概念の明確化と、それをもとにした教授実験による学習環境デザインのための条件の明確化が挙げられる。それらについて、以下順に説明する。

① 操作的証明の概念の明確化

操作的証明の概念については、これまでも研究を進めてきていたが、本研究を進めるにあたって、その提唱者である E. Ch. Wittmann の先行研究の精査を行った。その結果、「操作的証明は、数学的な問題状況の探究という学習活動に統合された証明であり、適切に表現された数学的対象に施された操作の結果に基づく証明である。」という操作的証明の特性を改めて明らかにすることができた。また、特に本研究で焦点をあてている「おはじきと位取り表を用いた操作的証明」に関しては、その基礎となるおはじきの操作を含めて具体事例を検討することができ、概念の整理を行うことができた。

② 教授実験による学習環境デザインの条件の明確化

操作的証明に関する先行研究の精査を踏まえて、具体的な学習環境デザインのための示唆を得るため、おはじきと位取り表を用いた操作的証明を題材とした教授実験をデザインし、中学校第1学年の生徒を対象として、調査を実施した。

教授実験は、おはじきと位取り表を用いて説明する学習課題を段階的に設定し、中学校第1学年の生徒2名(2組)を対象に実施した。

教授実験のために、おはじきと位取り表によって操作的証明を行う学習課題を3題用意し、段階を追って解決を図るよう指示した。最初の段階では、おはじきの操作に戸惑う場面も見られたが、教師とのやり取りの中で徐々に要領をつかむことができ、段階を進めるにつれて洗練された操作的証明が行えるようになることが観察された。

また、学習課題には2人ペアで取り組んだが、その中で他者のおはじきの操作を観察したり、自分の操作を振り返って説明したりすることを通して、操作的証明のアイデアが喚起され、課題の解決に至る様子が観察された。このことは、操作的証明の学習において、他者との相互作用が重要な役割を果たすことを示しており、おはじきと位取り表を用いた操作的証明の学習環境のデザインに対して

重要な示唆を得ることができた。

なお、これらの研究成果については、全国数学教育学会第38回研究発表会での研究発表を経て、同学会の学会誌「数学教育学研究」に投稿し、第20巻第1号に掲載された。

(2) 学習環境のデザインと効果の検証に関する研究成果

学習環境のデザインとその効果の検証に関する成果としては、おはじきと位取り表を用いた操作手証明の学習環境のデザインと、日英の小学校における検証授業の分析、さらにそこから得られた「道具的創成」という現象の解明が挙げられる。それらについて以下順に説明する。

① おはじきと位取り表を用いた操作的証明の学習環境のデザイン

理論的枠組みの構築のために行った巨樹実験では、操作的証明を行うためには、探究的な活動を中心としながら、段階を追った学習活動の設計と、他者との相互作用を実現できるような学習環境のデザインが有効であることが明らかとなった。そこで、それらの成果を踏まえ、具体的な学習環境のデザインを行った。特に、探究活動から相互作用を通して操作的証明を構想していくということから、対象を中学生に限定するのではなく、論証の素地的指導にあたる小学校高学年の児童を対象とした学習環境のデザインを行った。

デザインされたおはじきと位取り表を用いた操作的証明の学習環境は、「おはじきと位取り表による数の表現」「おはじきと位取り表による操作的証明の経験」「おはじきと位取り表による操作的証明の構想と構成」という3つの段階からなり、段階的に操作的証明の活動が行えるようにした。

第1段階では、おはじきと位取り表を用いて具体的な数を表現したり、おはじきの移動による数の増減を説明したりする活動を行った。

次に第2段階では、123, 234, 345, 456など各位の数字が連続した3ケタの自然数に198を加えると、123→321, 234→432, 345→543, 456→654のように、各位の数字が逆順になるという現象を扱い、おはじきの操作に対応させながら、その現象を説明することができることを理解する学習活動が設定した。

最後に第3段階では、E. Ch. Wittmann自身が操作的証明の概念の説明で用いているANNA数の数学的パターンを題材として取り上げた。1221と2112, 3553と5335など、各位の数字がANNAのような順になる4桁の自然数の差を計算すると、 $891 \times (\text{ANNA数を構成する2数の差})$ になるという数学的パターンで、探究的な活動の後に、おはじきと位取り表を用いて説明することが求められる学習課題とした。

②日英での実証授業の分析

デザインした学習環境を用いて、その効果を検証するため、日英両国の小学校第5学年の児童を対象とした実証授業を行った。「おはじきと位取り表による数の表現」「おはじきと位取り表による操作的証明の経験」「おはじきと位取り表による操作的証明の構想と構成」という3段階からなる学習活動を、それぞれの児童の特性に応じて2時間程度で実施し、分析を行った。

その結果、両国の実証授業とも、一部の児童は、第2段階、つまり、「おはじきと位取り表による操作的証明の経験」の段階で操作的証明を理解し、おはじきと位取り表を活用しながら数の性質を探求することができるということが観察された。さらに、一旦、おはじきと位取り表の操作を理解した児童は、それを利用して数の探究を進め、新たな数の性質を発見することができるということも明らかとなった。

このことは、論証の素地指導の段階である小学校高学年でも、おはじきと位取り表を用いた操作的証明を行うことができるだけでなく、操作的証明自体が新たな命題の生成に寄与しているということを示している。

また、日英という文化的背景の異なる児童を対象とした今回の実証授業において、両国の児童とも、おはじきと位取り表を用いた操作的証明を構想・構成し、探究活動を行うことができたということは、デザインされた学習環境が汎用性のあるものであることを示しており、1つの研究成果であるといえる。

③操作的証明における道具的創成の様相

日英の小学校における実証授業において、おはじきと位取り表による操作的証明を理解した児童が、それを活用して探究活動を進め、新たな数学的パターンを発見したり、それを説明したりするということが観察された。この現象は、「道具的創成」という概念で説明することができるが、今回の実証授業では、この「道具的創成」が観察されたということになる。

おはじきと位取り表というツールを思考のための道具として内面化し、それを活用して新たな数学的パターンを探求するという現象は、数学の学習上、有用なものであるが、一方で、論証指導という観点からは、留意すべき事柄もある。それは、通常論証指導では、「探究を通じた命題の生成」から「生成された命題の一般性の証明の構想・構成」という順に学習活動が展開されることが一般的であるが、道具的創成が起こった状況では、「命題の生成」と「証明の構想・構成」が同時進行的に発現するため、通常論証指導の順には展開しないということである。探究を通じた数学的パターンの発見という拡散的な思考を中心とした学習活動とするのか、論証を通して思考を収束させていく学習

活動とするのかによって、その扱いは変わってくると思われるが、特に小学校高学年から中学校段階にかけての論証指導の移行にあたっては、このような点に注意して学習環境のデザインを行う必要があることが示唆された。

なお、これらの研究成果については、全国数学教育学会第41回研究発表会での研究発表を経て、同学会の学会誌「数学教育学研究」に投稿し、第21巻第2号に掲載された。

(3) 研究の総括と活用方法の検討

本研究の総括として、これまでに行ってきた「操作的証明 (Operative proof)」に関する研究を、学位論文としてまとめた。

小学校高学年から中学校段階にかけての代数的証明の学習を対象として、その現状の分析を行うとともに、中学校数学科を対象とした操作的証明に関する学習環境デザインと実証的研究の成果をまとめ、「論証指導における操作的証明の機能に関する研究」として総括した。特に、おはじきと位取り表を用いた操作的証明に着目し、その特性を明らかにするとともに、学習環境のデザインと実証的研究を繰り返す中から、代数的証明の学習における操作的証明の機能について考察を行った。また、「課題探究として証明すること」という視点から操作的証明を用いた学習環境について検討し、それらを有効に機能させるための学習軌道を提案することができた。

これらの研究成果は、兵庫教育大学大学院連合学校教育学研究所へ博士論文として提出し、平成27年3月に博士(学校教育学)の学位を授与された(博乙第112号)。

また、学位論文は、兵庫教育大学学術情報リポジトリに登録され、全文が公開されており、研究成果の活用が可能となっている。

(4) 今後の課題

本研究を通して、おはじきと位取り表を用いた操作的証明を取り入れた楽手環境のデザインに関して、理論的枠組みの構築、具体的な学習環境のデザインとその効果の検証、これまでの研究の総括としての学位論文の提出、という形で一定程度の成果を上げることができた。しかし、研究を進める中で、「道具的創成」という概念に着目した操作的証明の学習環境のデザインという新たな課題も明らかとなった。

日英の小学校における実証授業においては、「道具的創成」と呼ばれる現象が観察された。おはじきと位取り表を用いた操作的証明を探究の道具として内面化した児童が、それを活用して新たな命題の生成を行うというこの現象は、今後の学習環境デザインに向けて大きな示唆を与えているといえる。つまり、小学校高学年の段階では、操作的証明という活動を取り入れることによって、一般的な論証指導における「命題の生成」→「証明

の構想・構成」問う順序は成り立たず、それらが同時並行帝に生起するというのである。このことを踏まえるならば、小学校高学年での探究的な活動を主とした代数的証明の素地的指導を、どのように形式的な証明の学習となる中学校段階へと接続していくかという問題は、連続的な発展の過程としての代数的証明の学習に対して、何らかの工夫や配慮が必要であるということを含意しているといえる。小学校高学年から中学校への代数的証明の接続という意味で、どのようなカリキュラムを構築していくべきかという研究は、今後の課題となるものである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

- ①佐々祐之・藤田太郎, 数学教育における「操作的証明 (Operative proof)」に関する研究 (IV) ～小学校段階での操作的証明における道具的創成の様相について～, 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 査読有, 第21巻第2号, 2015, 49-60.
- ②茅野公穂・佐々祐之・宮崎樹夫・宮川健・中川裕之・岩永恭雄・松岡樂, 課題探究として証明することのカリキュラム開発: 領域「数と式」, 「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化, 日本数学教育学会第3回春期研究大会論文集, 査読無, 第3巻, 2015, 7-12.
- ③佐々祐之, 論証指導における操作的証明の機能に関する研究～中学校数学科における学習環境デザインを通して～, 兵庫教育大学大学院連合学校教育学研究科博士論文, 2015.
- ④佐々祐之・大塚武秀, 「連続する自然数の和」において課題探究として証明することの授業化, 日本数学教育学会誌数学教育, 査読有, 第96巻第9号, 2014, 18-21.
- ⑤佐々祐之, 数学学習における「練習」に関する一考察～E. Ch. Wittmannの生産的練習の概念に着目して～, 日本学校教育学会誌学校教育研究, 査読有, 第29号, 2014, 100-111.
- ⑥佐々祐之, 数学教育における「操作的証明 (Operative proof)」に関する研究 (III) ～操作的証明を取り入れた教授実験を通して～, 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 査読有, 第20巻第1号, 2014, 27-36.
- ⑦宮崎樹夫・佐々祐之・辻山洋介, 課題探究として証明することのカリキュラム開発: 中学校数学科第2学年の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想, 日本数学教育学会第1回春期研究大会論文集, 査読無, 第1巻, 2013, 17-24.
- ⑧佐々祐之, 課題探究として証明することに関する実践的研究, 熊本大学教育学部紀要, 査読無, 第62号, 2013, 289-297.

[学会発表] (計5件)

- ①茅野公穂・佐々祐之・宮崎樹夫・宮川健・

中川裕之・岩永恭雄・松岡樂, 課題探究として証明することのカリキュラム開発: 領域「数と式」, 「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化, 日本数学教育学会第3回春期研究大会, 2015. 6. 28, 東京理科大学神楽坂キャンパス (東京).

- ②佐々祐之・藤田太郎, 数学教育における「操作的証明 (Operative proof)」に関する研究 (IV) ～小学校段階での操作的証明における道具的創成の様相について～, 全国数学教育学会第41回研究発表会, 2015. 1. 31-2. 1, 広島大学 (広島).

- ③佐々祐之・大塚武秀, 中学校数学における課題探究として証明することの授業化—第2学年の内容「連続する3つの自然数の和」—, 日本科学教育学会第38回年会, 2014. 9. 13-15, 埼玉大学 (埼玉).

- ④宮崎樹夫・佐々祐之・辻山洋介, 課題探究として証明することのカリキュラム開発: 中学校数学科第2学年の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想, 日本数学教育学会第1回春期研究大会, 2013. 6. 30, つくば大学東京キャンパス (東京).

- ⑤佐々祐之, 数学教育における「操作的証明 (Operative proof)」に関する研究 (III) ～操作的証明を取り入れた教授実験を通して～, 全国数学教育学会第38回研究発表会, 2013. 6. 22-23, 香川大学 (香川).

[図書] (計1件)

熊本大学教育学部・四附属学校園, 溪水社, 論理的思考力・表現力育成のためのカリキュラム開発 教科間連携, 幼・小・中連携を視野に入れて, 2015, 総ページ数299.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐々祐之 (SASA HIROYUKI)
北海道教育大・教育学部・教授
研究者番号: 30315387

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし