

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 14 日現在

機関番号：32702

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25381275

研究課題名(和文) 数学の能動的学習を促進する学習教材の研究開発

研究課題名(英文) Research and Development of Teaching Materials Which Promote Active Comprehension of Mathematics

研究代表者

何森 仁 (IZUMORI, HITOSHI)

神奈川大学・工学部・教授

研究者番号：20409923

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：図形教育の教材教具の研究開発を行い、2つの成果を得た。第1は、正多面体・準正多面体を容易に作ることができ、しかも面と辺と頂点の関係が能動的に理解できる教具を開発した。この多面体作成パーツ「スケルドロン」を使い、高校生対象の講座で生徒に正多面体や準正多面体を作ってもらい、その性質を考えてもらった。大変好評であった。

第2に、数列の指導等に有効な立方体のパーツの研究開発も行なった。試行錯誤の末に、自由に磁石でお互いに付けることができるように開発した。これを「M-キューブ」と名を付けて製作した。数列の和やさまざまな図形数の説明に有効であることが、高校生相手に行なった模擬授業でわかった。

研究成果の概要(英文)：This research paper concerns the research and development of teaching materials and tools for the study of geometrical shapes. Two tools were developed from this research.

Firstly, an easy-to-use tool for constructing regular-polyhedrons and semi-regular-polyhedrons. It easily shows the relations between the faces, edges and vertexes, by way of active interactions with the tool. We named the parts of this tool used in the creation of the polyhedrons "Skeledrons." During open lectures high school students were asked to consider the properties of those polyhedrons. The open lectures were popular among the students.

Secondly, the development of easy-to-use cube parts for the study of arithmetic sequences. From trial and error cube parts that could be stuck together by way of magnets were developed and named "M-cubes." It was clear that "M-cubes" are very useful for the practical explanation of arithmetic sequences, from trial lessons of high school students.

研究分野：数学教育

キーワード：数学教育 教材・教具 空間図形 正多面体・準正多面体 数列教材 変形サイコロ

1. 研究開始当初の背景

(1) “自ら考える学問”のはずの数学が、中学校や高等学校においては、依然受験対策中心の指導が一般的なため、暗記主義に生徒を駆り立てている傾向がある。これは、数学教育に大きなマイナス要因として数学嫌いを増やし、理系離れの一因になっているとも考えられる。

(2) 数学は本来、知的好奇心を大いに奮い起こさせるものであり、抽象的・論理的考えを伸ばし、他分野との関連が大いにある分野である。そのためには、多くの生徒に数学に対する興味を持たせ、数学の学力をつけさせる必要がある。

2. 研究の目的

本研究は、“数学への知的好奇心を高め、能動的学習を促進し、数学理解を深める教材及びカリキュラム”を研究開発することを目的とする。主として中学校及び高等学校指導要領(数学)に基づき、特に図形の分野と確率・統計での教材・教具開発をし、それにとりまう数学教育カリキュラム開発をめざす基本研究である。

3. 研究の方法

(1) 確率・統計教育の分野では、これまで研究・開発した、変形サイコロの追加研究と、「テープの10cm切り」の研究実践の普及をはかり、より使いやすいうように教材化する。
 (2) 図形・幾何教育の指導法の問題点を研究する。研究分担者の上垣渉氏の協力を得て、<数学史>との関連も考慮に入れながら、具体的教材を開発する。中・高校生は5種類の正多面体ですら、見たり触ったりする授業を受けていないのが現状である。だからこそ、図形・幾何教育の空間認識を高めるための教具を目標に開発する。

4. 研究成果

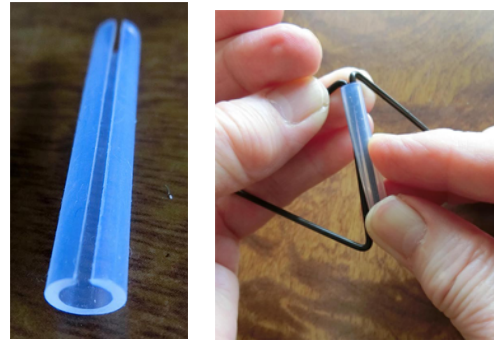
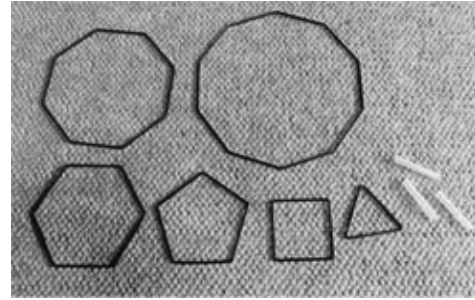
「研究成果の概要」で述べたように、本研究では、図形教育の分野で2つの大きな成果を得た。また、継続して研究していた確率・統計分野でも一定の前進を得た。そこで、図形教育の研究成果から述べる。

(1) 図形教育で、中学校1年の空間図形と高等学校の数学Aで学ぶ多面体を容易に作ることができ、またその性質が好奇心を持って考えられる教具開発を研究した。面と辺と頂点の関係が能動的に理解できる教具をめざした。

中学校でも高等学校でも、残念ながら教室に正多面体等の「実物」を持っていく教師は少ないし、生徒に作らせることはもっと少ない。これを解決するには、簡単に作ることができ、いろいろ生徒が興味を持つ教具でなくてはならないと考え、試行錯誤して、次のようなものを作成した。材料などの選定には東京都大田区の企業の方が相談にのってくれ、何回も試作をした結果である。

○正三角形、正方形、正五角形、正六角形、正八角形、正十角形は全て1辺50mmにして、直径2mmの鋼鉄の針金で作成。

○正多角形同士のジョイントは、穴の直径が4mmで長さ40mmテフロン樹脂のキューブに1mmのスリットを入れて作成。



正多角形とジョイントを正多面体5種類と準正多面体(最近では半正多面体という場合がある)13種類が全て同時に作れるだけの数を1セットと、下記表の○が付いている多面体を作るキットを14セット作成した。また、この教具には「スケルドロン」という名を付けた。

多面体の名前	頂点T	辺H	正三角形	正四角形	正五角形	正六角形	正八角形	正十角形
○正四面体	4	6	4					
○正六面体(立方体)	8	12		6				
○正八面体	6	12	8					
○正十二面体	20	30			12			
○正二十面体	12	30	20					
○切頂四面体(3,6,6)	12	18	4			4		
○立方八面体(3,4,3,4)	12	24	8	6				
○切頂八面体(4,6,6)	24	36		6		8		
○切頂六面体(3,8,8)	24	36	8				6	
○斜方立方八面体(3,4,4,4)	24	48	8	18				
○斜方切頂立方八面体(4,6,8)	48	72		12		8	6	
○変形立方体(3,3,3,3,4)	24	60	32	6				
○十二・二十面体(3,5,3,5)	30	60	20		12			
○切頂十二面体(3,10,10)	60	90	20					12
○切頂二十面体(5,6,6)	60	90			12	20		
○斜方十二・二十面体(3,4,5,4)	60	120	20	30	12			
○斜方切頂十二・二十面体(4,6,10)	120	180		30		20		12
○変形十二面体(3,3,3,3,5)	60	150	80		12			

例えば、正四面体なら、正三角形4個からなるので、辺の数、すなわちジョイントのチューブの数は、 $(3 \times 4) \div 2 = 6$ とわかる。また、正三角形、正方形、正五角形、正六角形、正八角形、正十角形を使ってできる、さまざま

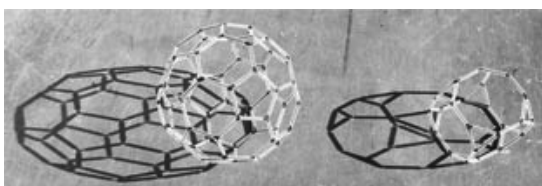
な多面体が手軽に作成できる。

まず、正多面体を作ってみる。下の写真は、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の5種類の正多面体である。光線を当てると、その影がいろいろ生徒の好奇心を駆り立てるようだ。

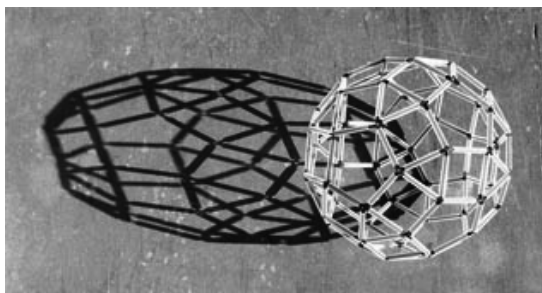


生徒や、教師を相手に行なった授業で、一辺の長さが等しい正多面体の体積を比較するのは、大変興味をひくものだった。まず、実物を作らずに、正多面体の体積を小さい順に並べてもらおうと、ほとんどの人が正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の順に大きいと答える。実際は正四面体の体積を1とすると、正六面体は約8.5倍、正八面体は4倍、正十二面体は約65倍、正二十面体は約18.5倍になる。正多面体を作って比べると納得できる。

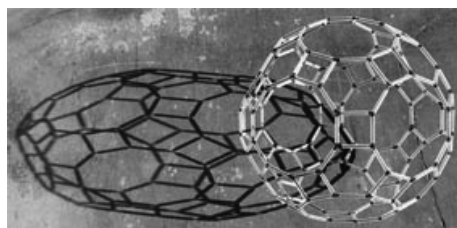
下は、準正多面体で、左がいわゆるサッカーボールといわれる切頂二十面体で、右が切頂六面体である。



下は、斜方十二・二十面体。



次は、準正多面体で一番大きくなる、斜方切頂十二・二十面体。



正多面体5種類と準正多面体13種類を並べると下のようになる。

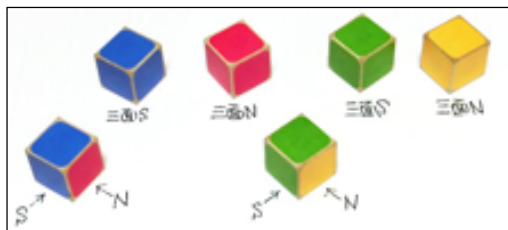
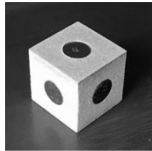


実際に、高校生や大学生に正多面体の授業をし、「スケルドロン」を使い、多面体を作ってもらった。その時、大変好評で高校生からは「高校の授業でも使ってほしい」「頭で考え発想力が高まった」「持って帰りたい」等の意見があり、数学科の大学生からは「初めて正多面体全部を見ることができ、初めて触った。」「教師になったら、是非使いたい」等の感想だった。また、数学教育の研究会で、「スケルドロン」を発表すると「是非授業で使いたい」との意見が中学校・高等学校の先生から数多くあった。大量生産をして、廉価に出回ればいいのだが、現在は無理の状態である。

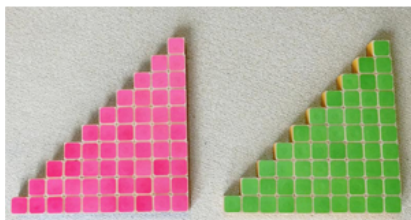


(2) 数や数列の教育で、図形、特に立方体を使い説明すると理解しやすく、生徒自ら楽しく探求することが明らかになってきた。そこで、立方体を生徒自ら、自由に並べ動的に数列の和の法則等を理解できる教具を研究開発した。それは、自由に磁石でお互いに付けることができる立方体のパーツを製作者者と相談しながら試行錯誤して開発した。

一辺 24 mm 木製の立方体の各面に、穴を空け、そこに磁石を埋め込む。ただし、三面は例えば「S 極」というように同じ極、他の三面は違う極になるようにした。そして、下の写真のように同じ極には、同色のしっかりとしたシールを貼った。こうすれば、向きさえ調節すれば、立方体同士は必ず付く。青と赤の立方体と緑と黄の立方体 2 種類を、2000 個作成した。

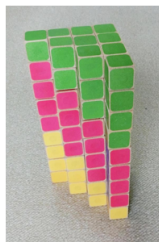
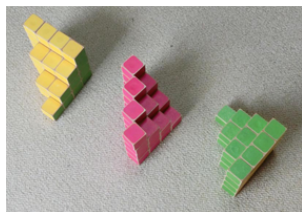
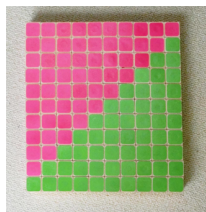


この教具には、「M-キューブ」という名を付けた。

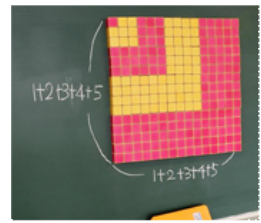


$1+2+3+\dots+10$ は上の二つ作りそれを右のように合体すれば、 $10 \times (10+1) \div 2$ が見える。

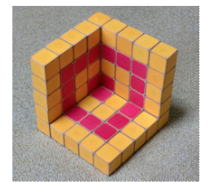
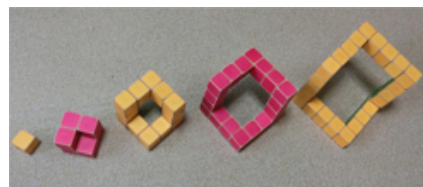
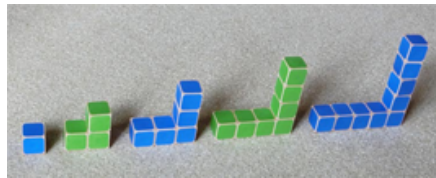
$1^2+2^2+3^2+4^2$ を下の左のように 3 個作りそれを重ねて、和の説明ができる。



$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$ は、次の写真のように、黒板にキューブを付けて、それを大きい正方形にして、全部の個数は $(1+2+3+4+5)^2$ になることを示せる。これは、学生は大いに興味を持った。



下記に他の例を示す。



いろんな人に使ってもらったら、大いに興味を持って自らいろいろ組み立てたりしていた。意外なことに、幼年児に使ってもらうと、夢中でさまざまな「図形遊び」をし、幼年児の図形感覚の教育に有効なことも分かった。

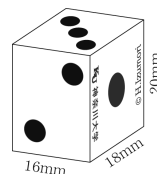
「M-キューブ」も「是非欲しい」との声が多いのだが、やはり「スケルドロン」同様、大量製作が無理な状況である。



(3) 継続して研究をしている、確率と統計の授業のカリキュラム作りも前進できた。

変形サイコロ「サイドタ」は、多くの中学、高校の先生方から「使いたい」との希望があり、これまで 1 万数千個の「サイドタ」を提供してきた。「生徒達が自ら積極的に確率の授業に取り組む」との報告が来ている。多くの先生・生徒の協力で、現在約 28 万回の集約ができている。

出た目→	1	2	3	4	5	6	計
回数	65307	43263	29057	29087	43422	64834	274970
相対度数	0.238	0.157	0.106	0.106	0.158	0.236	1



また、タブレットを使い、「サイドタ」実験をリアルタイムで集計し、授業にいかすシステムも進め、一定の前進はしたが、予算の関係で今回は、実用化は断念した。

統計の分野で、生徒に実際の 10cm の長さを見せて、その後に覚えている 10cm に紙テープを約 100 本切ってもらい、その平均や分散を求めるという「テープの 10cm 切り」の授業実践は、より広まっている。黙っていても、生徒が次々と計算して理解を深めるとの報告があった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[図書] (計 3 件)

何森仁、小沢健一、明日香出版、算数から数学までまるごと 8 時間でわかる本、2014、126 頁

上垣渉、明治図書、数学史の視点から分析する中学校数学重要教材研究事典 図形編、2014、136 頁

上垣渉、明治図書、数学史の視点から分析する中学校数学重要教材研究事典 数と式編、2014、110 頁

6. 研究組織

(1) 研究代表者

何森 仁 (IZUMORI HITOSHI)
神奈川大学・工学部・教授
研究者番号：20409923

(2) 研究分担者

上垣 渉 (UEGAKI WATARU)
岐阜聖徳学園大学・教育学部・教授
研究者番号：70252327