

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 12 日現在

機関番号：32601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25390146

研究課題名(和文) Sinc数値計算法を超える高精度数値計算法の研究

研究課題名(英文) Numerical methods achieving higher accuracy than the Sinc numerical methods

研究代表者

杉原 正顯 (Sugihara, Masaaki)

青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号：80154483

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：Sinc数値計算法は、Sinc関数近似を用いた数値計算法の総称であり、解析関数に対して極めて有効であり、関数が特異性を持つ場合にも頑健であることが知られている。そして、このSinc関数近似は理論的には准最適であることが示されている。本研究では、このSinc関数近似を超える精度をもつ関数近似公式、より正確には、最適関数近似公式を開発し、さらには、そこで得られた知見をもとに、最適数値積分公式に関する理論を構築し、それに基づき、最適に近いと期待される数値積分公式を数値計算によって求めた。これらを統一的に扱うポテンシャル論に基づく方法論も開発した。

研究成果の概要(英文)：Sinc numerical methods is a general term for numerical methods using Sinc approximation. They are extremely effective for analytic functions, and are known to be robust even when function has singularities. It is also shown that the Sinc approximation is nearly optimal in theory. In this research, we develop numerical methods achieving higher accuracy than the Sinc numerical methods. Specifically, we develop a function approximation formula achieving higher accuracy than the Sinc approximation, more precisely, an optimal approximation formula. Further, based on the knowledge obtained there, we establish a theory of the optimal numerical integration and based on the theory, a numerical integration formula expected to be close to optimal is obtained by numerical calculation. We also develop a methodology based on the potential theory that designs optimal formulas in a unified way.

研究分野：数値解析学

キーワード：関数近似 数値積分 Sinc関数近似 DE変換 最適関数近似 最適数値積分公式

1. 研究開始当初の背景

数値計算技術が現在の科学技術の基盤をなすことは論をまたないであろう。しかし、従来、数値計算の分野において用いられてきた数値計算法は、主に多項式近似に基づくものであり、一般的に、関数が区間上で解析的である場合には非常に有効であるが、区間の端点に代数的特異点や対数特異点をもつ場合には有効性を著しく欠くことが知られている。これに対して、Stenger等は、Sinc近似

$$f(x) \approx \sum_{j=-N}^N f(jh) \frac{\sin[(\pi/h)(x-jh)]}{(\pi/h)(x-jh)}$$

および変数変換の技法を用いることによって、関数が区間の端点に特異性をもっても有効性が落ちず、誤差が指数的に減少する多くの数値計算法を開発した。これらの数値計算法は総称して「Sinc数値計算法」と呼ばれている。

杉原(研究代表者)は、このSinc数値計算法の誤差の理論解析を進め、Sinc数値計算法の基礎となるSinc関数近似の誤差が指数関数的に減少する関数空間を明らかにし、さらにその関数空間における関数近似誤差の下界を与えた(引用文献①)。この下界を達成する関数近似公式が存在するかどうかは未知のままであったが、杉原は、鶴島、岡山等とともに、引用文献②の結果からヒントを得て、下界を達成する具体的近似公式(=「Sinc関数近似を超える最適近似公式」)を発見した。下図に、最適近似公式とSinc近似関数の誤差の振る舞いの例を示す。最適近似公式がSinc近似に比べて、誤差がかなり小さいことが観察される。

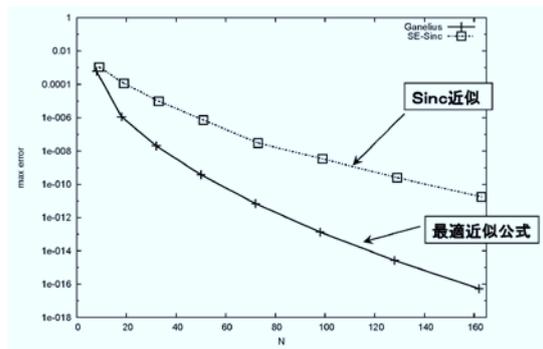


図1 Sinc近似と最適近似公式の誤差

Sinc数値計算法には、数値積分用に高橋秀俊・森正武によって提案された二重指数関数型変数変換(Double Exponential変換—以下略してDE変換と記す)を組み入れたSinc数値計算法もあり、DE-Sinc数値計算法と呼ばれることも多い。杉原(研究代表者)は、このDE-Sinc数値計算法に関してもSinc関数近似の誤差が指数関数的に減少する関数空間を明らかにし、さらにその関数空間における誤差の下界を与えた(引用文献①)。ただし、

この場合の下界を達成する近似公式が存在するか、存在した場合、具体形はどのように与えられるかは未解決問題であった。

2. 研究の目的

上記の「研究開始当初の背景」に述べたような状況に鑑み、以下の3つの目的を設定した。

(1) 杉原、鶴島、岡山による最適近似公式のさらなる理論的、数値的研究：杉原、鶴島、岡山による最適近似公式においては、関数空間を定めるパラメータ  $\mu$  (関数の特異性に対応する)が1未満でなくてはならないという制約がある。この制約の本質を理解し、この制約を外すことを目指す。

(2) 最適近似公式を用いて、解析系のほとんどすべての数値計算法を構築することができる。ここでは、基本的な数値計算法について、例えば、数値積分について、理論、数値実験の両面から研究を行う。

(3) DE-Sinc数値計算法の誤差が指数関数的に減少する関数空間における誤差の下界に関する研究(下界を達成する近似公式が存在するか、また、存在した場合、具体形はどのように与えられるかを探求する)。

3. 研究の方法

上記の3つの研究の目的に即して述べる。

(1) 研究目的「杉原、鶴島、岡山による最適近似公式のさらなる理論的、数値的研究」に関しては、最適性の証明を精査することから始めた。それによって、証明に間違いがあることが判明した。しかしながら、数値実験を見る限り、その結果に間違いがないと考えられるため(図1参照)、その間違いを修正するために、様々な考察を行うことになり、結果的に、研究成果に述べるような多くの成果を得ることとなった。特に、ポテンシャル論に基づく、最適近似公式構築に対する統一的なアプローチは、本研究の基本的道具となった。

(2) 研究目的「最適近似公式に基づく基本的な数値計算法の構築」については、数値積分について、理論、数値実験の両面から研究を進めた。特に引用文献③、④にある考え方を援用することによって、最適数値積分公式の研究を進めた。

(3) 研究目的「DE-Sinc数値計算法の誤差が指数関数的に減少する関数空間における誤差の下界に関する研究」については、杉原、鶴島、岡山による最適近似公式の鍵となるGaneliusの定理をDEの場合に拡張すべく、様々な試みを行ったが、残念ながら理論的な結果は得られなかった。そこで、(1)で得

られた、ポテンシャル論に基づく、最適近似公式構築に対する統一的なアプローチを用いて、数値的に誤差の下界を与えると期待される近似公式を計算した。

#### 4. 研究成果

研究の目的(1), (2), (3)に即して述べる。

(1)先の研究の方法において述べたように、最適性の証明を精査によって、証明に間違いがあることが判明したが、証明を修正することに注力し、最終的に正しい証明を得た(発表論文②)。

また、証明の精査によって、関数空間を定めるパラメータ  $\mu$  (関数の特異性に対応する)が 1 未満でなくてはならないという制約に関して、理解を深めることができ、パラメータ  $\mu$  が一般の場合に対する最適近似公式を得た(発表論文④)。

さらには、引用文献①にある公式において、杉原、鶴島、岡山による最適近似公式で用いる標本点 (Ganelius によるため、Ganelius 標本点とよぶ) を用いれば、最適近似公式が得られることも明らかとなった。この公式には、パラメータ  $\mu$  (関数の特異性に対応する)が 1 未満でなくてはならないという制約はない。ここで、2種類の最適近似公式—杉原、鶴島、岡山による最適近似公式、引用文献①から導かれる最適近似公式—があることになるが、どちらが実際の数値計算上優れているかが問題となる。しかし、様々な数値実験を行った結果、両者に大きな差はないという結論に至った(学会発表①)。

本研究によって、引用文献①にある最適近似公式に関する一般論の重要性が認識されることとなった。実際、引用文献①において、標本点に関するある関数の最小値さえ計算できれば、その標本点を用いて最適近似公式を与える公式を構築できる方法論が与えられている。そして、標本点に関するある関数の最小値を求める問題は、ある種のポテンシャル問題を解く問題に近似的に帰着されることが明らかとなった(発表論文③, ⑤)。このポテンシャル論を用いて得られる近似最適近似公式の誤差の振る舞いを図2に示す。

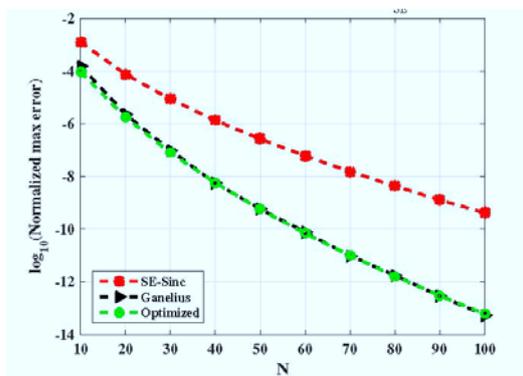


図2 ポテンシャル論を用いて得られる近似最適近似公式の誤差(参考のため、Sinc 関数近似, Ganelius 標本点を用いた

場合の近似公式の誤差も示す)

理論的に最適であることが分かっている Ganelius 標本点を用いた近似公式と同じ程度の誤差であり、近似最適近似公式が最適に近いことが分かる。

(2)引用文献④にある誤差の表現を用いて、引用文献③にあるアイデアを援用することによって、最適数値積分公式の研究を進めた。最適近似公式の場合と同様に積分公式の場合も、標本点に関するある関数の最小値さえ計算できれば、その標本点を用いて最適積分公式を与える公式を構築できることが明らかとなった。さらに、最適近似公式の場合と同様に、ある種のポテンシャル問題を解く問題に近似的に帰着されることも明らかとなった(発表論文①)。このポテンシャル論を用いて得られる近似最適積分公式の誤差の振る舞いを図3, 4に示す。準最適性が証明されている台形則と比べると、高精度な数値積分公式が得られていることが観察される。ただし、引用文献③には、数値積分公式の誤差の下界の評価が与えられているが、それと比較すると、まだ差がある。

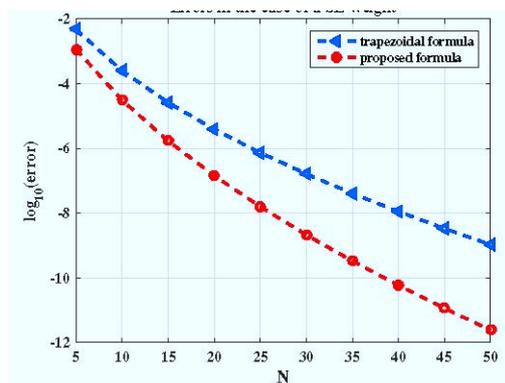


図3 ポテンシャル論を用いて得られる近似最適数値積分公式の誤差(Sinc 関数近似が有効となる関数空間の場合. 参考のため、台形則の誤差も示す)

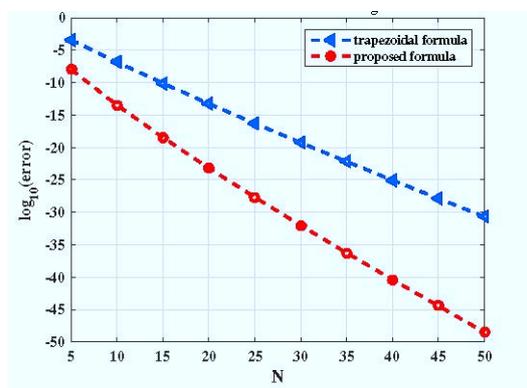


図4 ポテンシャル論を用いて得られる近似最適数値積分公式の誤差(DE-Sinc 関数近似が有効となる関数空間の場合. 参考のため、台形則の誤差も示す)

(3) ポテンシャル論に基づく、最適近似公式構築に対する統一的なアプローチを用いて、DE-Sinc 関数近似が有効となる関数空間の場合に、数値的に誤差の下界を与えると期待される近似公式を計算した(発表論文③,⑤). 近似最適近似公式の誤差の振る舞いを図5に示す. 近似最適近似公式が、DE-Sinc 近似に比べて、誤差がかなり小さいことが観察される.

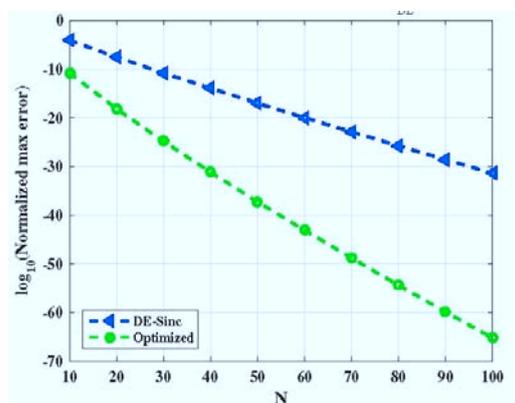


図5 ポテンシャル論を用いて得られる近似最適近似公式の誤差 (DE-Sinc 関数近似が有効となる関数空間の場合. 参考のため、DE-Sinc 関数近似の誤差も示す)

#### <引用文献>

- ①M. Sugihara: Near optimality of the sinc approximation, *Math. Comp.*, Vol. 72 (2003), pp. 767-786.
- ②A. P. Jang and S. Haber: Numerical indefinite integration of functions with singularities, *Math. Comp.*, Vol. 70 (2001), 205-221.
- ③M. Sugihara, Optimality of the double exponential formula - functional analysis approach, *Numer. Math.*, Vol. 75 (1997), pp. 379-395.
- ④J. E. Andersson and B. D. Bojanov: A note on the optimal quadrature in Hp. *Numer. Math.*, Vol. 44 (1984), pp. 301-308.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ①Ken'ichiro Tanaka, Tomoaki Okayama, and Masaaki Sugihara: Potential theoretic approach to design of accurate numerical integration formulas in weighted Hardy spaces, to appear in *Approximation Theory XV*, San Antonio, 2016 (査読有) .
- ②鵜島 崇, 田中 健一郎, 岡山 友昭, 杉原 正顕: Ganelius 標本点を用いた関数近似式, *日本応用数理学論文誌*, Vol. 27 (2017) No. 1, pp. 1-20 (査読有) .  
<https://www.jstage.jst.go.jp/article/js>

iamt/27/1/27\_1/\_pdf

③Ken'ichiro Tanaka, Tomoaki Okayama, and Masaaki Sugihara: Potential theoretic approach to design of accurate formulas for function approximation in symmetric weighted Hardy spaces, *IMA J. Numer. Anal.*, Vol. 37 (2017), pp. 861-904 (査読有) .  
DOI:<https://doi.org/10.1093/imanum/drw022>

④Ken'ichiro Tanaka, Tomoaki Okayama, and Masaaki Sugihara: An optimal approximation formula for functions with singularities, arXiv:1610.06844 (査読無) .  
<https://arxiv.org/abs/1610.06844>

⑤Ken'ichiro Tanaka, Tomoaki Okayama, and Masaaki Sugihara: Potential theoretic approach to design of accurate formulas for function approximation in symmetric weighted Hardy spaces, arXiv:1511.04530 (査読無) .  
<https://arxiv.org/abs/1511.04530>

[学会発表] (計 6 件)

- ①杉田 幸亮, 杉原 正顕, 田中 健一郎, 岡山 友昭: eye-shaped 領域上の重み付きハーディ空間における 2 つの最適な関数近似公式の比較, 日本応用数理学学会 2016 年度年会, 2016 年 9 月 12 日, 北九州国際会議場 (北九州市).
- ②田中 健一郎, 岡山 友昭, 杉原 正顕: 重み付きハーディ空間における高精度数値積分公式の設計, 日本応用数理学学会 2016 年度年会, 2016 年 9 月 12 日, 北九州国際会議場 (北九州市).

③Ken'ichiro Tanaka, Tomoaki Okayama, and Masaaki Sugihara: Potential Theoretic Approach to Design of Approximation Formulas in Symmetric Weighted Hardy Spaces, 15th International Conference Approximation Theory, 2016 年 5 月 23 日, Texas (USA).

④Ken'ichiro Tanaka, Tomoaki Okayama, and Masaaki Sugihara: Potential theoretic approach to design an optimal formula for function approximation in a weighted Hardy space, "New Directions in Numerical Computation, in Celebration of Nick Trefethen's 60<sup>th</sup> Birthday", 2015 年 8 月 25 日, Oxford (UK).

⑤Ken'ichiro Tanaka, Tomoaki Okayama, and Masaaki Sugihara: Potential theoretic approach for unified design of function

approximation formulas in weighted Hardy spaces, International workshop "Recent developments in numerical analysis with special emphasis on complex analysis", 2015年7月24日, 東京大学(東京).

⑥田中 健一郎, 岡山 友昭, 杉原 正顯: ポテンシャル論による重み付きハーディ空間上の最適関数近似公式の設計, 第44回数値解析シンポジウム, 2015年6月8日, ぶどうの丘(山梨県甲州市).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

杉原 正顯 (SUGIHARA, Masaaki)

青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号: 80154483

### (4) 研究協力者

田中 健一郎 (TANAKA, Ken'ichiro)

岡山 友昭 (OKAYAMA, Tomoaki)

杉田 幸亮 (SUGITA, Kosuke)