

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25390154

研究課題名(和文)速度場の構造・特徴に基づく流体混合効率指標の数理的解析

研究課題名(英文) Mathematical Analysis of indices of mixing efficiency of fluids based on the characteristics of velocity fields

研究代表者

船越 満明 (Funakoshi, Mitsuaki)

京都大学・情報学研究科・教授

研究者番号：40108767

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：外部温度場の鉛直勾配の増加に伴って発生する直方体容器内の流体の熱対流の3次元定常速度場とその下での流体粒子の運動を、容器が傾いていない場合と傾いている場合について調べた。容器の傾き方と、熱対流速度場のもつ対称性および流体粒子の運動の特徴の関係を高精度の数値計算によって調べた結果、流体粒子のカオス運動の有無と速度場のもつ対称性に関係があり、速度場の対称性が流体混合効率の重要な指標の1つであることがわかった。また、直方体容器の共鳴的運動によって励起される水面波に伴う流体運動も調べ、容器のどのような運動の下で3次元流体速度場が時間について周期的、準周期的あるいはカオス的となるかを明らかにした。

研究成果の概要(英文)：Three-dimensional steady velocity field of thermal convection of a fluid in a rectangular container due to the increase in the vertical gradient of external temperature and the motion of fluid particles under this velocity are examined for non-inclined and inclined containers. The relation between the inclination of the container and the symmetry of velocity fields or the characteristics of the motion of fluid particles is examined with a numerical method of high accuracy. We obtain a close relation between the existence of chaotic motion and the symmetries of velocity fields. Therefore, the symmetry of velocity fields is one of the important indices of efficiency of fluid mixing. Fluid motions associated with water waves excited by the resonant motions of a rectangular container are examined. We obtain the conditions for the container's motion under which the three-dimensional velocity fields caused by the motion are time-periodic, quasi-periodic or chaotic.

研究分野：数理流体力学

キーワード：カオス 流体混合 速度場の対称性 熱対流 水面波

1. 研究開始当初の背景

2種類以上の流体を一様に混合する、あるいは、ある流体の中に少量の添加物を一様に混ぜ込むことは、以前から化学工業、食品工業、ガラス工業、製薬工業を始めとする多くの工業での製品製造において重要なプロセスであり、近年の製品の品質向上に伴って益々重要度を増している。流体の混合には乱れていない流れである層流による混合と乱流による混合があるが、最近製薬工業などでよく用いられるマイクロスケールの実験装置などでは、全体のスケールが小さいために粘性の効果が強く、流れを乱流化するという効率のよい混合方法が使えない。また、熔融ガラスや化学プラントでの原料のような粘度の高い流体の場合は、流れを乱流化することは多大のパワーを必要として現実的ではないので、層流によって混合が行われてきた。また、食品原料の混合などにおいては、混合すべき流体のもつ微細構造を保ったまま混ぜることが重要な場合もあり、その場合は流体内に大きな応力が働く乱流による混合は好ましくない。

層流による混合に関しては、流体運動がカオスとなるような速度場を用いて効率が良く一様な混合を目指す「カオス混合」に関する研究が、主にカオスや力学系の理論を用いて1980年頃から行われ始めた。すなわち、層流の定常流や時間周期流の場合でも流体の微小部分がカオス運動をすることがあり、そのような場合はカオスのもつ初期値に対する敏感な依存性から微小部分は速やかに引き伸ばされて折りたたまれ、流体は効率よく混合されると期待される。層流混合においてカオス混合が実際に有効であることは、これまでの数多くの研究によって明らかにされている。またカオス混合は、カオスのもつ特性を直接的に有効利用し、力学系の理論などの数理的な解析手法を用いる研究分野であるとも言える。したがってカオス混合は、多くの工業での製造過程に関係する応用上重要なテーマであるだけでなく、数理工学のテーマとしても大変興味深い。

このカオス混合に関する研究のこれまでの発展や成果については、例えば J.M.Ottino の本 (“The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport” , Cambridge Univ. Press, (1989)) や、H.Aref の解説論文 (“Chaotic Advection of Fluid Particles” , Phil.Trans.R.Soc.Lond.A, Vol.333, pp.273-288,(1990))、船越満明の本 (“Chaotic mixing and mixing efficiency in a short time” , Fluid Dyn. Res., Vol.40, pp.1-33, (2008). および「カオス (シリーズ非線形科学入門3)」, 朝倉書店, (2008).) などに詳しく書かれている。

これまでのカオス混合の研究においては、与えられた速度場の下での流体の微小部分の運動や変形に基づくさまざまな混合効率の指標が用いられてきた。たとえば2次元の

時間周期的流れあるいは3次元の空間周期的な定常流の場合には、流体の微小部分 (流体粒子) の1周期の間の運動を表すポアンカレ写像を定義し、この写像によるいくつかの流体粒子の運動を多周期にわたってプロットしたポアンカレ断面がしばしば計算される。このポアンカレ断面において、流体粒子がカオス的に動き回る領域 (カオス領域) の割合は混合効率の指標としてしばしば用いられる。

また、流体中の各線要素の引き伸ばしを特徴付ける最大リアプノフ指数の空間分布や、面要素の面積の増加率の分布を混合効率の指標とすることも行われている。しかし、これらの指標は、与えられた速度場の下での流体の微小部分の時間発展を求めて初めて得られるものであり、その計算には一般に多くの手間がかかる。

そこで、速度場の構造や特徴だけから、混合過程や混合効率に関する情報を得ようとする研究も行われており、いくつかの結果が得られている。たとえば、2次元の非圧縮性流体の流れにおいては、流体粒子の運動を決める方程式は流れ関数をハミルトニアンとする1自由度ハミルトン系に帰着できるので、力学系の理論から、流体粒子のカオス運動は定常流の場合には不可能であるが、時間周期流の場合には可能であることがわかっている。

また、オイラー方程式に従う非粘性非圧縮性流体の3次元定常流では、すべての場所で速度ベクトルと速度場の rot である渦度ベクトルが平行であり、かつそれらの大きさの比が定数である Beltrami flow の場合にのみ流体粒子のカオス運動が可能であることが知られている。しかし、ナビエ・ストークス方程式に従う3次元の粘性流体の流れの場合は、いくつかの流れにおける流体粒子のカオス運動の例は示されているが、一般的に速度場のどのような構造や特徴の下でカオス運動が広範囲に見られるかについては、ほとんどわかっていない。

また、3次元定常流の下での流体粒子の運動を支配する方程式は、時間依存するハミルトニアンをもつ1自由度ハミルトン系と局所的には対応づけられるが、速度場のよどみ点 (平衡点) が存在する場所ではこの対応関係が破綻するなど、完全な対応はつけられないことがわかっている。とくに、いくつかのよどみ点が存在することが予想される閉じた領域の流れでは、速度場の構造・特徴と混合効率の関係に関する一般的な解析が難しく、これまで普遍的な結果はほとんど得られていない。

さらに、より複雑な3次元の時間周期的あるいはカオス的な層流速度場の下での混合効率についてはほとんど調べられていない。

2. 研究の目的

本研究では、層流による流体混合の効率の

良い方法として最近大きく発展しつつあるカオス混合に関係した数理的解析として、各種の層流速度場の構造や特徴を調べるとともに、これらの速度場の下での流体のカオス運動の可能性について調べ、速度場の構造や特徴に関係した有用な混合効率指標を見出すことを目指す。具体的には、閉じた領域での3次元の定常流や時間周期流などの速度場を考える。

3. 研究の方法

閉じた領域での3次元定常流や時間周期流が比較的容易に得られる例として、直方体容器内の熱対流、および容器の共鳴的運動によって励起される水面波に伴う流体運動を考える。そして、これらの流れがどのようなパラメータ領域で生じるのかを数値的に精度よく調べる。また、これらの流れの速度場の構造・特徴を明らかにしていくとともに、これらの速度場の下での流体混合の効率についても考察する。

4. 研究成果

まず完全熱伝導性の剛体壁面をもつ傾いていない直方体容器内の粘性流体を考え、その外部温度場は鉛直方向に一定の勾配をもち上方ほど低温であるとする。この温度勾配を増加させていくと、温度勾配に比例する無次元パラメータであるレイリー数のある値（臨界レイリー数と呼ぶ）で流体の静止状態が不安定となり熱対流が発生する。このときの流体運動の速度場は3次元定常速度場となる。

本研究では、修正されたチェビシェフ多項式系で速度場、温度場を展開するガラキン・スペクトル法を用いた高精度の数値計算によって、臨界レイリー数 Rc の値および臨界レイリー数で発生する熱対流の定常速度場を、容器のアスペクト比 Ax , Ay のさまざまな値に対して求めた。ここで、 Ax , Ay は容器の水平2方向 (x 方向と y 方向) の長さを鉛直方向の長さで割ったものである。 Ax , Ay が6以下の場合について詳細に調べた結果、 Rc は Ax , Ay の増加とともに減少していくことがわかった。また発生する熱対流の速度場は、 x 方向、 y 方向および z 方向にそれぞれ対称あるいは反対称である計8個のモードの速度場の中のいずれかであり、どのモードが発生するかは Ax , Ay の値に依存する。そして、 Ax , Ay がともに4に近い場合、およびともに5.5に近い場合には、先行研究とは異なる対称性をもつモードが発生する。

Rc で発生する熱対流のモードの速度場の構造は、鉛直方向にはつねに1つだけの渦からなる。そして、水平方向の速度場の構造は Ax , Ay の増加とともに複雑になっていき、大きな Ax , Ay では多数の対流セルからなる速度場が得られるが、各対流セルの水平方向の長さは概ね容器の高さに近い値となる。

このような熱対流の速度場の下での流体粒子（流体の微小部分）の運動の軌跡は、多くの場合には閉曲線となり、特別な初期位置に対してはヘテロクリニック軌道となる。たとえば、 $Ax=Ay=6$ の場合に発生する熱対流モードの速度場の下での流体粒子の軌道は図1のようになり、全部で20個の対流セルの各々の内部での流体粒子の軌道は閉曲線となっている。また、この図からも推測されるように、各対流セルの中央部には渦運動の軸（水平軸）が存在するが、この軸は一般には容器のいずれの側壁にも平行ではない。

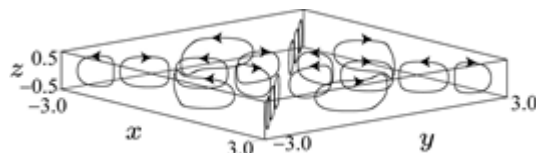


図1

また、 Ax , Ay の一方あるいは両方が1よりもずっと小さい場合についても、 Rc の値および Rc で発生する熱対流の定常速度場を詳細に調べた。その結果、 Ax , Ay の一方あるいは両方が0に近づくにつれて Rc の値が急激に増加し、また摂動計算によって求めた Rc の漸近形が数値計算の結果とよく一致することがわかった。また、 Ax のみを0に近づけていくと、発生する熱対流モードの対流セルの y 方向の長さは容器の高さに比べて小さくなっていき、 Ax , Ay がいずれも1より大きいときには見られなかった縦長の対流セルが生じる。図2にその例として、 $Ax=0.025$, $Ay=1$ の場合の5個の対流セルを、各対流セル内の流体粒子の軌道を用いて示している。しかし、 Ax , Ay の一方あるいは両方が1よりもずっと小さい場合においても、発生する熱対流モードの速度場の下での流体粒子の軌道はカオスになることはなく、その大部分は閉曲線となる。

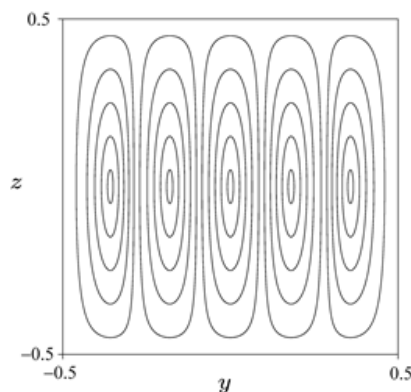


図2

以上のことより、3次元定常流では流体粒子のカオス運動が一般には可能であるにもかかわらず、傾いていない直方体容器中の Rc で発生する熱対流の3次元定常速度場では、

カオス運動は見られない。したがって、この場合の熱対流による流体混合の効率は低いと考えられる。

次に、図3 (a)に示したように、鉛直方向に一定の勾配をもつ外部温度場の中に直方体容器が傾いて置かれている場合の熱対流の発生について調べた。容器の傾きは角度 γ と ϕ によって特徴づけられる。すなわち、容器はまず図3 (b)のように y 軸のまわりに角度 ϕ だけ回転し、ついで図3 (c)のように、図3 (b)の ξ 軸のまわりに角度 γ だけ回転する。

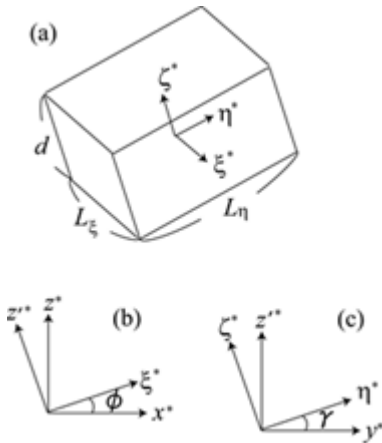


図3

容器を傾けていくと、 Re の値が変化するだけでなく、 Re で発生する熱対流の速度場の対称性も変化する。すなわち、 ϕ が0で γ が0でない1方向のみに傾いた場合の速度場は、図3 (a)の ξ 方向の対称性と η と ζ の同時符号反転に関する対称性という2つの対称性をもつ。また、 ϕ も γ も0でない2方向に傾いた場合の速度場は、 ξ 、 η 、 ζ の同時符号反転に関する対称性のみをもつ。

そして、これらの速度場の下での流体粒子の運動を調べると、容器が1方向のみに傾いた場合はカオス運動は見られないが、2方向に傾いた場合はトーラス的あるいはカオス的な運動の見られる場合があることがわかった。このカオスの有無という違いは上記の速度場の対称性の違いを反映していると考えられる。すなわち、対称性の高い速度場の下ではカオスは発生しにくく、対称性の低い速度場の方が流体粒子のカオス運動を引き起こす可能性が高いと考えられる。

したがって、本研究で得られた結果から、速度場の対称性は流体混合効率の重要な指標の1つであると考えられる。具体的には、考えている系の幾何学的配置を速度場の対称性が減るように決めることによって、あるいは非線形性の効果をより強くするようなパラメータの値を設定して速度場の対称性を減らすことによって、流体粒子のカオス的な運動が起こりやすくなり、流体の混合効率が高まると予想される。たとえば、直方体容器内の熱対流においては、特定の A_x 、 A_y の場

合に発生する熱対流の速度場は、複数のモードの重ね合わせとなるので対称性が低下すると予想され、この場合の熱対流による流体混合の効率は大きくなると予想される。また、レイリー数を Re から上げていくと、非線形性の効果が増加して熱対流の定常速度場の対称性も一般に低下するので、カオス的な流体粒子の運動やそれに伴う効率の良い流体混合も期待される。

つぎに、流体を途中まで入れた直方体容器の共鳴的運動によって励起される水面波に伴う流体運動も調べ、どのような加振の下で流体速度場が時間周期的、準周期的あるいはカオス的となるかを明らかにした。

具体的には、まず容器が慣性系に対して水平方向に楕円を描くように周期的に動く場合を調べた。この場合の容器の運動は図4のように2つの角度 θ と ϕ によって指定される。すなわち、 θ は楕円の長軸と x 軸方向のなす角であって、 $\tan \phi$ は楕円の長軸と短軸の長さの比を表し、とくに ϕ が0のときは1つの方向への往復運動となり、 ϕ が45度のときは円運動となる。本研究では、さまざまな ϕ と θ の値に対して、容器の運動によって励起される水面波とそれに伴う流体運動を弱非線形理論を用いて詳しく調べた。

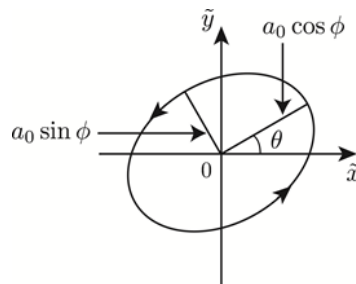


図4

この研究においては、流体は非粘性であって渦なし運動をするものと仮定する。そして容器の運動の振動数 Ω が水面波の(1, 0)モードおよび(0, 1)モードの固有振動数 ω に近い共鳴的な場合を考えると、これらのモードの大振幅の波が励起される。 ϕ と θ がともに0である x 方向への直線状の容器の運動の場合に励起される水面波の代表的な振る舞いは、図5 (a)のような x 方向にのみ水面が変動する振動数 Ω の周期的非回転波、あるいは図5 (b)のような振動数 Ω の周期的回転波（時計回りあるいは反時計回り）である。

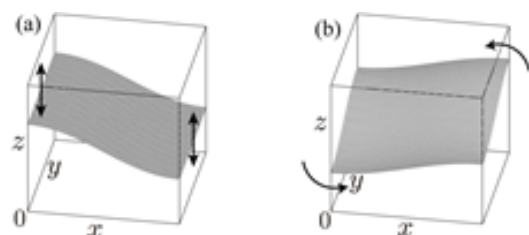


図5

これらの周期的な波に伴う層流の流れの速度場は3次元の時間周期的なものとなる。このような速度場の下での流体混合については、これまでほとんど調べられていないが、3次元で時間周期的であることから、比較的効率の良い混合が期待できる。

Ω と ω の差に比例する振動数のずれのパラメータ δ の値をいろいろと変えたときに励起される周期的非回転波あるいは周期的回転波の振幅を表す応答曲線は、 ϕ と θ がともに0であるときには図6のようになる。ここで、実線、一点鎖線はそれぞれ非回転波、回転波を表し、太線部分は安定、細線部分は不安定である。

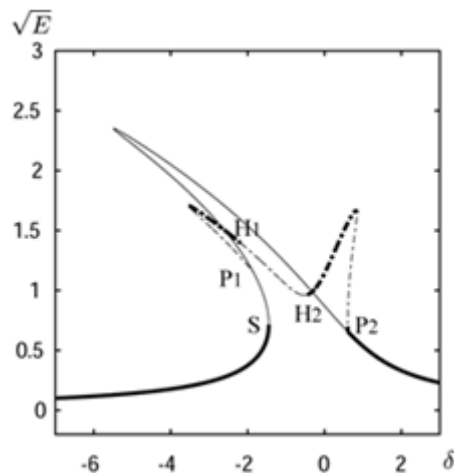


図6

δ が図6のSと H_2 の間にあるときには、周期的な波はいずれも不安定であり、振幅が時間とともにゆっくりと周期的あるいはカオス的に変化する回転波が得られる。このような回転波に伴う流体運動は、一般に準周期的あるいはカオス的に時間変化する3次元の層流速度場を与えるので、周期的な非回転波あるいは回転波の場合よりも混合効率が高いと予想される。また、一般に ϕ が0に近いほど、高い混合効率の期待できるカオス的な速度場が見られることが多いので、効率の良い流体混合のためには、容器を円運動させるよりは直線上の往復運動をさせる方が良いと予想される。

また、水を途中まで入れた直方体容器を水平の1方向に振動数 Ω で加振し、同時に鉛直方向に振動数 2Ω で加振すると、 Ω が水面波の(1,0)モードおよび(0,1)モードの固有振動数 ω に近い共鳴的加振の場合には、大きな振幅の水面波が励起される。この水面波の振る舞いは、水平加振と鉛直加振の位相のずれ γ の値に大きく依存し、振動数 Ω の周期的非回転波と周期的回転波のほかに、振幅が時間とともにゆっくりと周期的あるいはカオス的に変化する回転波が得られる。したがって、容器の水平・鉛直方向の共鳴的加振によって励起される水面波による流体混合の効率に

関しては、容器の共鳴的楕円運動によって励起される水面波による流体混合の場合と同様な予想ができる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計12件)

- ① 船越満明, 直方体容器内で発生する熱対流速度場のアスペクト比依存性, 日本流体力学会年会 2013 講演論文集, 査読無, 2013, USB メモリー.
- ② 船越満明, 直方体容器内で発生する3次元熱対流の速度場の特徴, 日本物理学会講演概要集第2分冊, 査読無, 第68巻第2号, 2013, 247-247.
- ③ 船越満明, 深澤義成, 直方体容器で発生する熱対流の速度場のアスペクト比依存性, 日本物理学会講演概要集第2分冊, 査読無, 第69巻第1号, 2014, 317-317.
- ④ 平光亜衣, 船越満明, 水平方向に往復または楕円運動する直方体容器中の水面波, 日本流体力学会年会 2014 講演予稿集, 査読無, 2014, USB メモリー.
- ⑤ 船越満明, 深澤義成, 直方体容器で発生する熱対流に伴う速度場のアスペクト比依存性, 日本流体力学会年会 2014 講演予稿集, 査読無, 2014, USB メモリー.
- ⑥ 船越満明, 深澤義成, 直方体容器で発生する熱対流に伴う速度場のアスペクト比依存性, 日本学術会議第63回理論応用力学講演会講演論文集, 査読無, 2014, USB メモリー.
- ⑦ 平光亜衣, 船越満明, 水平方向に往復または楕円運動する直方体容器中の水面波, 日本学術会議第63回理論応用力学講演会講演論文集, 査読無, 2014, USB メモリー.
- ⑧ A. Hiramitsu and M. Funakoshi, Surface waves in a square container due to its resonant horizontal elliptic motion, Fluid Dynamics Research, 査読有, Vol. 47, 2015, 045504 (25 pages).
- ⑨ Y. Fukazawa and M. Funakoshi, Onset of thermal convection and its flow patterns in a rectangular cavity, Fluid Dynamics Research, 査読有, Vol. 47, 2015, 065505 (33 pages).
- ⑩ 平光亜衣, 船越満明, 直方体容器の共鳴的水平運動によって励起される水面波の挙動, 日本流体力学会年会 2015 講演論文集, 査読無, 2015, USB メモリー.
- ⑪ 平光亜衣, 船越満明, 水平方向に往復または楕円運動する直方体容器中の水面波, 京都大学数理解析研究所講義録, 査読無, 第1946巻, 2015, 11-21.
- ⑫ 山崎 徳幸, 船越満明, 容器の水平・鉛直方向への共鳴的加振による水面波, 京

都大学数理解析研究所講究録，査読無，
第 1989 巻，2015，45-53.

[学会発表] (計 15 件)

- ① 船越満明，直方体容器内で発生する熱対流速度場のアスペクト比依存性，日本流体力学会年会 2013，2013 年 9 月 12 日，東京農工大学.
- ② 船越満明，直方体容器内で発生する 3 次元熱対流の速度場の特徴，日本物理学会 2013 年秋季大会，2013 年 9 月 26 日，徳島大学.
- ③ 平光亜衣，船越満明，水平方向に往復または楕円運動する直方体容器中の水面波の振る舞い，京都大学数理解析研究所 研究集会「非線形波動現象の数理と応用」，2013 年 10 月 16 日，京都大学.
- ④ 船越満明，深澤義成，直方体容器で発生する熱対流の速度場のアスペクト比依存性，日本物理学会第 69 回年次大会，2014 年 3 月 28 日，東海大学.
- ⑤ 船越満明，深澤義成，直方体容器で発生する熱対流に伴う速度場のアスペクト比依存性，日本流体力学会年会 2014，2014 年 9 月 16 日，東北大学.
- ⑥ 平光亜衣，船越満明，水平方向に往復または楕円運動する直方体容器中の水面波，日本流体力学会年会 2014，2014 年 9 月 17 日，東北大学.
- ⑦ 船越満明，深澤義成，直方体容器で発生する熱対流に伴う速度場のアスペクト比依存性，日本学術会議第 63 回理論応用力学講演会，2014 年 9 月 26 日，東京工業大学.
- ⑧ 平光亜衣，船越満明，水平方向に往復または楕円運動する直方体容器中の水面波，日本学術会議第 63 回理論応用力学講演会，2014 年 9 月 28 日，東京工業大学.
- ⑨ 平光亜衣，船越満明，水平方向に往復または楕円運動する直方体容器中の水面波，京都大学数理解析研究所 研究集会「非線形波動現象のメカニズムと数理」，2014 年 10 月 15 日，京都大学.
- ⑩ 船越満明，平光亜衣，水平方向に往復または楕円運動する容器中の水面波の非線形挙動，日本物理学会 2015 年秋季大会，2015 年 9 月 18 日，関西大学.
- ⑪ 平光亜衣，船越満明，直方体容器の共鳴的水平運動によって励起される水面波の挙動，日本流体力学会年会 2015，2015 年 9 月 26 日，東京工業大学.
- ⑫ 山崎徳幸，船越満明，容器の水平鉛直方向への共鳴的加振による水面波，京都大学数理解析研究所 研究集会「非線形波動現象の数理に関する最近の進展」，2015 年 10 月 15 日，京都大学.
- ⑬ M. Funakoshi and A. Hiramitsu, Surface waves in a square container due to its resonant horizontal elliptic motion, 68th Annual Meeting of the

APS Division of Fluid Dynamics, 2015 年 11 月 24 日, Boston, USA.

- ⑭ M. Funakoshi and A. Hiramitsu, Surface waves in a square container due to its resonant horizontal elliptic motion, 3rd International Conference on Violent Flows, 2016 年 3 月 11 日, Osaka, Japan
- ⑮ 船越満明，直方体容器での熱対流の発生，計算数理工学フォーラム，2016 年 3 月 18 日，京都大学.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

- 出願状況 (計 0 件)
- 取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等
該当なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

船越 満明(FUNAKOSHI, Mitsuaki)
京都大学・大学院情報学研究科・教授
研究者番号：40108767

(2) 研究分担者

該当者なし

(3) 連携研究者

該当者なし