

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 6 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400005

研究課題名(和文)L関数たちの近似論に関する研究

研究課題名(英文)Study on the theory of approximation for L-functions

研究代表者

名越 弘文(Nagoshi, Hirofumi)

群馬大学・大学院理工学府・准教授

研究者番号：70571165

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：L関数たちの値分布論において、同時普遍性と呼ばれる性質を、t-aspect, q-aspectおよびd-aspectと呼ばれる場合について研究しいくつかの結果を得た。それに関連する話題として、 $SL(2, Z)$ の正則保型形式に付随するL関数たちの零点に関する研究も行った。さらに、セルバーグ直交性の新たな応用として、L関数たちの独立性に関するいくつかの結果を得た。

研究成果の概要(英文)：We studied the so-called joint universality properties in the theory of value-distribution of L-functions and established several results in the cases of the t-aspect, q-aspect and d-aspect. As a related topic, we also studied zeros of L-functions associated with holomorphic cusp forms for $SL(2, Z)$. Furthermore, we obtained several results on independence of L-functions, by applying Selberg's orthogonality.

研究分野：解析的数論

キーワード：L関数 値分布 独立性 セルバーグ直交性 セルバーグ・クラス

1. 研究開始当初の背景

ゼータ関数あるいはL関数と呼ばれる関数たちに対する値分布の研究は, Bohr によって始まった。その後, Voronin によって, リーマン・ゼータ関数に対していわゆる普遍性定理と呼ばれる結果が得られた。さらに, Voronin らによって, (1つだけでなく) 複数個のディリクレL関数たちに対して, 同時普遍性定理と呼ばれるもっと強い結果が得られた。値分布に関するこれらの結果たちは, 例えば, リーマン・ゼータ関数に対するリーマン予想の同値命題を生み出したり, Hilbert によって得られていたリーマン・ゼータ関数に対するある超越性の結果の別証明を生み出すなどの興味深い応用が知られていた。

2. 研究の目的

上記に述べた普遍性定理は, L関数たちの値分布の理論の中でも, 稠密性や近似に関するものである。これまでに得られていた普遍性定理あるいは同時普遍性定理は, ほとんどが t -aspect と呼ばれる場合のものである。解析的数論においては, L関数を個々に扱うだけでなく, L関数たちの族を扱うことが重要であることが認識されている。研究代表者らは, 以前に, リーマン予想の同値命題をL関数たちの族の観点から得ていた。

これらのことを踏まえて, t -aspect 以外の場合の結果をさらに得ることや, L関数たちの互いの近似に関する結果を得ることを, 本研究の目的とする。

また, 上記に述べたように, L関数に対するこのような値分布の研究は, L関数たちの独立性に関する結果を生むことが知られていたが, その方面についてさらに研究を行うことも, 本研究の目的とする。

3. 研究の方法

Voronin によって得られたリーマン・ゼータ関数に対する普遍性定理は, その後, 様々な研究者たちによって, 他の関数たちに拡張されたり, 類似の結果を得るといった研究がなされた。その中でも特に, Bagchi と Gonek によって, L関数たちの族の代表例である q -aspect と呼ばれる場合に対して, 普遍性定理が得られた。そして, Bagchi は, t -aspect および q -aspect の場合に, 付随する適当な確率分布に対する考察を行うことにより, 普遍性定理に対する新たな証明を得た。このようなL関数たちの族に対する確率論的な研究は, t -aspect の場合に比べて, 現在でも非常に少ない。Bagchi の手法を参考にしながら, 研究を行う。

また, L関数たちの独立性に関する話にお

いては, ディオファントス近似論や超越数論における結果や手法も参考にしながら, 研究を行う。

4. 研究成果

(1) 研究成果の1つは, L関数たちに対する t -aspect の同時普遍性に関するものである。この性質に関してこれまでに証明されていた定理たちは, 大雑把には2つあるいは3つのタイプのL関数たちに対するものであった。特に, 同時普遍性を満たす「任意個数」のL関数たちの組については, これまでは実質的には, Dirichlet 指標たちに付随するという極めて特殊な場合にしか知られていなかった。研究代表者は, 見正氏との共同研究で, 新たな視点を導入することにより, 虚二次体たちの Hecke 量指標たちに付随する「任意個数」のL関数たちの組について同時普遍性を証明することができた。その証明には, このL関数たちのディリクレ係数たちに関するかなり深い数論的な事実を使っており, この関連性の点でも, また, もっと一般の代数体への拡張が可能かもしれないという点でも, 興味深い成果であると思われる。

さらに, 研究代表者は, Dirichlet 指標たちの場合などの今までに知られていた3つの同時普遍性定理たちを統合する新たな定理を得ることができた。

また, 研究代表者は, セルバーグ・クラスと呼ばれるディリクレ級数たちのある集合に関して, primitive とは限らない一般の元たちに対して, t -aspect の同時普遍性という性質および関連する性質がどのような時に成り立つのかなど, セルバーグ・クラスの構造に関する考察を行い成果を得た。その副産物として, ある予想について反例があることが分かった。

(2) 上記の(1)は, 複素変数の虚部 t を動かすといういわゆる t -aspect と呼ばれる場合についての研究である。普遍性定理の研究は, これまでほとんどがこのような t -aspect の場合であった。そして, t -aspect に対しては, 同時普遍性と呼ばれるもっと強い現象が上述のように認識されていた。 t 以外のパラメータに関する普遍性の研究は, これまで2つあるいは3つのタイプしか知られていなかった。研究代表者は, 見正氏との共同研究で, q -aspect と呼ばれるものと d -aspect と呼ばれるものについて普遍性の結果を拡張し同時普遍性の結果を得た。

さらには, 特に d -aspect の場合の手法を使って, 二次体たちの類数たちについて同時稠密性という新たな興味深い現象を得た。

(3) 次は, L関数の零点たちに関して, 値分布論の応用としての成果である。 $SL(2, Z)$ の正則な cusp form に付随するL関数について

は、古典的な結果や予想が知られている。例えば、同時固有関数に対するL関数は一般リーマン予想が成り立つことが予想されている。研究代表者は、セルバーグ直交性などを使うことにより、同時固有関数でないものに対するL関数について、右臨界領域内の零点たちの存在に関する結果を得た。この結果は、同時固有関数に対するL関数の一般リーマン予想とは対照的な現象である。ある意味において、この一般リーマン予想の主張を補完する成果であるとも考えられる。

(4) 次は、L関数たちの独立性に関する成果である。Hilbertによってリーマン・ゼータ関数に対するある独立性が得られて以来、その別証明やもっと強い独立性が研究されてきた。特に、1970年代にVoroninによって得られた別証明およびある拡張は、リーマン・ゼータ関数の値分布の話に基づいたものである。研究代表者は、2007年ぐらいから進展してきたhybridな値分布の話を用いて、更なる拡張の定理を得た。また、この成果は、リーマン・ゼータ関数の場合だけに限るものではなく、適当な条件を満たすL関数たちも含む一般的なものである。

また、 $GL_m(A_Q)$ の一般の保型L関数に対して、ラマヌジャン予想を仮定しなくても、ある超越的な性質(ただし、上述のVoroninの意味での独立性よりも弱い)が成り立つことが分かった。これは、上述のHilbertの結果の相当な一般化である。

さらに、次の成果も得た。これは、上記の(3)と同じく、セルバーグ直交性の応用である。あるL関数たちの代数的微分独立性が、ラマヌジャン予想を仮定しなくても成り立つことが分かった。線形独立性等のもっと弱い結果は、他の研究者たちによって得られていた(ただし、もっと広いクラスのL関数たちである)が、今回の結果は、ある意味で、その結果を改良している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

H. Nagoshi, Zeros of the L-function attached to a cusp form and some applications of Selberg's orthogonality, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, to appear, <http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/24851>

H. Nagoshi, Joint value-distribution of L-functions and discrepancy of Hecke eigenvalues, Lithuanian Mathematical Journal, 査読有, to appear, <http://www.springer.com/mathematics/jou>

rnal/10986

H. Nagoshi, Hypertranscendence of L-functions for $GL_m(A_Q)$, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 査読有, 93, 2016, 388-399, DOI: 10.1017/S000497271500129X

[学会発表](計6件)

名越 弘文, Zeros of the L-function attached to a cusp form and some applications of Selberg's orthogonality, Analytic Number Theory and Related Areas, 2015年11月5日, 京都大学数理解析研究所

名越 弘文, The existence of zeros of non-primitive L-functions for $SL(2, Z)$ in the strip $1/2 < \text{Re } s < 1$, Diophantine Analysis and Related Fields 2015, 2015年3月7日, 桐生市市民文化会館

名越 弘文, 見正 秀彦, 実指標 Dirichlet L関数間の同時d-普遍性と類数たちの多次元稠密性, 日本数学会 2014年度秋季総合分科会, 2014年9月25日, 広島大学

名越 弘文, Combining three theorems on the joint universality of L-functions, 日本数学会2014年度年会 2014年3月18日, 学習院大学

名越 弘文, 見正 秀彦, 同時普遍性を持つ任意個数の保型L関数たちの例, 日本数学会2013年度秋季総合分科会 2013年9月24日, 愛媛大学

名越 弘文, Independence of L-functions and the Nevanlinna characteristic, 日本数学会 2013年度秋季総合分科会, 2013年9月24日, 愛媛大学

[図書](計0件)

[産業財産権]
出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:

番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

名越 弘文 (NAGOSHI, Hirofumi)
群馬大学・大学院理工学府・准教授
研究者番号：70571165

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし