

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 22 日現在

機関番号：33919

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400010

研究課題名(和文) 多変数 sigma 関数を中心にした堅牢な Abel 関数論の構築

研究課題名(英文) Construction of concrete theory of Abelian functions focusing the multivariate sigma functions

研究代表者

大西 良博 (Onishi, Yoshihiro)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：60250643

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000 円

研究成果の概要(和文)：(1) Eilbeck, England との共著論文を査読付学術誌に発表([論 2])。 (2) 上の(1)の結果を種数 2 以上の場合に拡張し、論文を執筆中。 (3) Sigma 関数の原点での冪級数展開の Hurwitz 整性を発見、証明し、査読付学術誌に投稿([論 1])。 [発 1, 2, 3] で発表。 (4) 有理数体上の非 Galois 拡大体に虚数乗法を持つ Abel 多様体の例を極めて具体的に構成([他 1])。 (5) Eilbeck 氏を招聘('15 年 10 月)、共同で熱方程式が sigma 関数の特徴づけることを証明。共著論文執筆中。

研究成果の概要(英文)：(1) I published a paper on new addition formulae for genus one case, which is a result of collaboration with J.C. Eilbeck and M. England. (2) I generalized the result in (1) to any plane telescopic curves. I am writing a paper on this. (3) I discovered that the sigma functions have Hurwitz integrality on the power series expansion at the origin. (4) I proved this phenomenon, wrote a paper, and submitted it. (5) I had talks in Japan on the results of (2) and (3). (6) According to my best knowledge, there is no explicit description of example of Abelian variety which has non-Galois complex multiplication. I found it and wrote a note on it. You can download it from my web page. (7) I invited Eilbeck in order to research on the theory of heat equations satisfied by the sigma functions. We two got a large amount of results by this research. We are writing papers on the results.

研究分野：Abel 関数論

キーワード：Abelian function Jacobian variety Abelian variety algebraic curve

1. 研究開始当初の背景

本研究代表者は Weierstrass と H.F. Baker による先行研究を深める形で海外の研究者も交へて, Abel 関数の具体的な扱ひを主眼に長年, 研究を重ねてきた. その結果, 次元が 2 以上の Jacobi 多様体, Abel 多様体について, 精密に計算できる理論の全貌が現れてきた.

特に, 本研究では以下の 3 項目に重点を置いて研究した.

- (1) Jacobi 多様体の階層化を込めた一般加法公式.
- (2) σ 関数の原点での冪級数展開の Hurwitz 整性.
- (3) σ 関数の熱方程式による特徴付け. 特に先頭の定数つまり判別式の $1/8$ の意味を見出すこと.

参考文献表

- [参 1] J.C. Eilbeck, V.Z. Enol'skii, S. Matustani, Y. Ônishi, and E. Previato: Abelian functions for trigonal curves of genus three, International Mathematics Research Notices, 2008:1(2008)102-139
- [参 2] J.C. Eilbeck, S. Matustani and Y. Ônishi: Addition formulae for Abelian functions associated with specialized curves, Phil.Trans. Royal Society A, 369(2011)1245-1263
- [参 3] Y. Ônishi: Determinant expressions for hyperelliptic functions, (with an Appendix by Shigeki Matsutani: Connection of The formula of Cantor and of Brioschi-Kiepert type), Proc. Edinburgh Math. Soc., 48(2005)705-742

2. 研究の目的

- (1) 研究対象について どんな楕円曲線も (基礎環が何でも)

$$y^2 - (\mu_1 x + \mu_3) y - (x^3 + \mu_2 x^2 + \mu_3 x + \mu_4) = 0$$

(μ_j は定数) の形の方程式で定義されることが知られてゐるが, 本研究では, これを含む一般的な形

$$y^e - x^q - \sum_{a,b} \mu_{eq-ae-bq} x^a y^b = 0$$

(ただし $\gcd(e, q) = 1$ で $0 \leq a < q$, $0 \leq b < e$ で $ae + bq < eq$) で定義される平面曲線を主に扱ふ. この型の曲線を 平面 telescopic 曲線, もしくは (e, q) 曲線と呼ぶ. これまでの研究代表者の研究等を踏まへ, この種の曲線を研究することが重要である理由をいくつか挙げる:

- ① 無限遠には 1 点のみ存在するが (それを単に ∞ と記す), そこにおける極の位数でもつて weight を付ける, 即ち x と y の weight をそ

れぞれ $-e, -q$ とすることで, この曲線に対応する Abel 関数の様々な等式が斉重になる;

- ② この曲線の Jacobi 多様体に自然な stratification を導入することで, ① の様々な等式を偏微分して得られる等式が各階層 (stratum) で非常に有効に働く;
- ③ また, この型の曲線は全代数曲線の中でも比較的大きな family をなしてゐるので, まずはこの型の曲線で, 研究を進めて, その後より一般の曲線に向ふのが有効だと考へられる, 等々

特に ② によつて, Abel 関数を 1 変数関数の“積み重ね”として眺めることができ, それをうまく総合することで, 多変数関数としての構造を復元し, より明晰な理解を得ることができる. その顕著な結果として Bernoulli 数の高い種数の Abel 関数への一般化が本研究代表者により得られてゐる (Russian Math. Surveys, 66(2011)871-932). この方向での研究が可能な曲線の族が知られてゐる. それは三浦晋示氏により特定されたもので, telescopic curves と呼ばれる.

この様に, 本計画は一般の (e, q) -curves について, 計算による実験等が可能であることを想定した具体的で堅牢な Abel 関数論を構成することが目的であつた.

- (2) 本研究の具体的な目標とその意義.

以下, 本研究で得られると予想された成果について述べる.

① Hermite-Frobenius-Stickelberger 型の公式の拡張. $(2, 3)$ 曲線 \mathcal{C} に付随する σ 関数と \mathcal{C} 上の代数関数との間に成り立つ Hermite-Frobenius-Stickelberger に由来する重要かつ美しい行列式表示式がある. これを特殊な (e, q) 曲線にまで様々な形で一般化してきたが, さらに, 一般的な (e, q) 曲線に対して一般化する. 特に, その各々の公式が参照する変数をより広く選べる様にする.

② Hurwitz 整性. σ 関数の原点における冪級数展開は Hurwitz 整性と呼ばれる良い性質を持つことが観測されてゐる. これに証明を付けること.

③ σ 関数の解析的構成法と代数的構成法の比較. σ 関数にはいくつかの構成法がある. しかし, これらの構成法で同じ σ 関数が得られる仕組みは完全に解明されてゐない. 例へば全体に掛かる定数 (判別式の $\frac{1}{8}$ 乗) の必要性の根拠や, Riemann 定数の具体的な値等については未解明である. この点を詳しく探る.

④ Recursion, Heat equation. σ 関数の原点における冪級数展開の係数は閉じた形の漸化式を満たす. その様な漸化式は θ 関数が満たす熱方程式を σ 関数の言葉に焼き直すことで得られることは Weierstrass に源がある. この方法は Buchstaber, Leykin, Enolskii の共著論文で扱はれ, 種数 2 には完全に具体的に拡張された. これを, 種数の高い他の曲線の場合に拡張すること.

3. 研究の方法

(1) 海外研究者の招聘

本研究計画では、海外研究者の招聘により、その都度、明確にされた問題を集中的に議論する事が要となつてゐる。実施内容は次の通り：

2015年10月6日から10月27日、J.C. Eilbeck氏を名城大学に招き、当該研究の近辺の現状を把握した。特に以下を目標とした：① theta級数の満たす、良く知られた熱方程式はFourier展開の各項についても満たされる。そこで、まづ、多変数のtheta関数のFourier展開の各項が満たす。熱方程式を特定した。(Buchstaber-Leykinの論文でもさうしてゐる様に見えるが、結果が正しくない。) ② 代数的な解になるためには、各項ではうまくいかないの、 σ 関数を考察することになる。その際に σ 関数がmodular invariantになる様にするために、判別式の $\frac{1}{8}$ 上に等しくなる様な半整数weightの正則保型形式(Dedekind η 関数の多変数版)を乗ずる必要がある。この際に、熱作用素が判別式にどう働くかを調べておき、それにより、乗ずる指数 $\frac{1}{8}$ が決定される。③ さらに実際に σ 関数の展開係数を漸化式で計算すること。

本課題は整数論全般の研究の進歩と密接に関わることが多いので、初年度は、早稲田大学で毎週開催される整数論seminarに多く出席し、整数論研究の現状を常に把握するやう努めた。(早稲田大学の整数論seminarは、伝統があり、現在も非常に活発な交流の場である。)

随時、国内での発表とemail等を使つて研究の推進をし、Webでの情報発信も行なつた。特に、津田塾大での研究集会...

と愛知数論セミナー

日韓整数論シンポジウムにて1時間の口頭発表を行なつた。

(2) 招聘と出張の状況

出張先とその時期を記録しておく。

① 早稲田大学、整数論セミナー

<http://www.waseda.jp/sem-wnt/>

2013年度に計9回の出席

(名城大学に移つてからの2年間は講義の関係で出席できなかつた)

第1回 2013年4月12日(金)

講演者：室井 和男

タイトル：バビロニアの整数論と三角関数表プリントン 322

第2回 2013年4月19日(金)

講演者：内田 幸寛 (首都大学)

タイトル：Hyperelliptic net による超楕円曲線上のTate-Lichtenbaumペアリング

第4回 2013年5月10日(金)

講演者：伊藤 剛司 (千葉工業大学)

タイトル： \mathbb{Z}_p 拡大における「馴分岐岩澤加群」の岩澤不変量について

第5回 2013年5月17日(金)

講演者：小木曾 岳義 (城西大学)

タイトル：「非概均質的局所関数等式について」

第6回 2013年5月24日(金)

講演者：松本 耕二 (名古屋大学)

タイトル：G2型ルート系のゼータ関数

第7回 2013年5月31日(金)

講演者：鈴木 正俊 (東京工業大学)

タイトル：ある種の正準系の逆問題とその応用

第9回 2013年6月14日(金)

講演者1：Dr. Haigang Zhou (Department of Mathematics, Tongji University)

タイトル1：Siegel modular forms of weight two and Hurwitz quaternion

講演者2：Hatice Boylan (Max Planck Institute for Mathematics and Istanbul University)

タイトル2："Linear characters of Hilbert Modular Groups and associated Automorphic forms"

講演者3：Dr. Nils Skoruppa (Max-Planck Institute for Mathematics and University of Siegen)

第13回 2013年7月12日(金)

講演者：星 裕一郎 (京都大学)

タイトル：数体の乗法的情報による加法構造の復元

第18回 2013年10月18日(金)

講演者：加塩 朋和 (東京理科大学)

タイトル：有理数体上のStark予想の部分的な別証明

④ その他の出張

・2014/02/17-19 津田塾大学、

4. 研究成果

(1) 主な成果

① Hurwitz 整性. 素数2以外に関しては、中屋敷氏の示唆による σ 関数の無限次数の行列式表示を利用することで証明ができた。ただ、頭初の予想と少し異なり、分母に2が現れることがある。その場合もこの方法で完全に特定ができたので、全体をまとめて論文として発表した。(arxiv.org/...)

② Hermite-Frobenius-Stickelberger 型の行列式表示公式の拡張. 本研究代表者の得た公式は中屋敷氏が最近いくつか発表してゐる結果の一部含まれてゐるが、一般の (e, q) 曲線に対して、中屋敷氏の方法では導き出せない新公式を得た。その結果を津田塾大での研究集会と日韓整数論シンポジウムで発表した。

③ Recursion, Heat equation. Buchstaber, Leykin の共著論文で扱われた方法が超楕円曲線の場合と $(3, 4)$ 曲線の場合に σ 関数の特徴付けるこ

とを確認した. Program に実装し, 多くの項が非常に高速に得られることを確認した. 論文執筆中. さらに (2,3) 曲線の場合に Weierstrass 型に変形しないでも, 完全に一般的な形で扱えることを見出した. これも論文にして発表する予定.

④ (追加) Prime forms. 2011-2013 の科研費補助金による研究の過程で, 松谷氏と . Gibbons 氏による要請で prime 形式の研究を行つたが, その結果を [論 3] として査読つき学術誌に出版した.

(2) 成果の国内外での位置付け, impact 等.

③ Recursion により, 実際に沢山の項が得られることを確認できたことから, 様々な実験が可能となった.

熱方程式は σ 関数の冪級数展開の係数を recursive に与へるだけではなく, θ から σ を構成するのになぜ判別式の $\frac{1}{8}$ 乗を掛ける必要があるのかを説明することができる, といふことがわかつた. 但し, なぜ判別式なのか, は不明である. また, このことから, Dedekind η 関数の多変数版の存在が仄めかされる.

(3) 今後の展望

① 熱方程式が σ 関数を特徴付けることの一般的な証明を得ること.

② σ 関数の解析的な構成において, なぜ判別式の 8 乗根で割る必要があるのかの本質的な理由を解明すること.

③ Sylvester による判別式の計算方法をより一般の曲線についても適用すること.

5. 主な発表論文等

【雑誌論文】(計 7 件)

[論 1] Y. Ônishi : Hurwitz integrality of power series expansion of the sigma function for a plane curve, <http://arxiv.org/abs/1510.03002> (査読無)

[論 2] J. C. Eilbeck, M. England, and Y. Ônishi : Some new addition formulae for Weierstrass elliptic functions. Proc. R. Soc. A 470(2014)14 pages (DOI: 10.1098/rspa.2014.0514) (査読有)

[論 3] J.Gibbons, S.Matsutani, and Y.Ônishi : Relationship between the prime form and the sigma function for some cyclic (r,s) curves. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. 46:17(2013)1–21 DOI:10.1088/1751-8113/46/17/175203 (査読有)

【学会発表】(計 4 件)

[発 1] 大西良博: “New addition formulae for Weierstrass elliptic functions and for higher genus Abelian functions” 研究集会 Curves, Moduli and Integrable Systems, 2014 年 2 月 17 日 ~ 19 日, 津田塾大学 5 号館 5206 室
主催: 中屋敷 厚

[発 2] 大西良博: “New addition formulae for Weierstrass elliptic functions and for higher genus Abelian functions”, 日韓整数論シンポジウム 2014, 場所: 慶應大学理工学部 (慶応義塾大学矢上キャンパス, 厚生棟 3 階会議室), 2014 年 11 月 19 日 ~ 11 月 22 日,

[発 3] Y.Ônishi: “多変数 sigma 関数の原点における冪級数展開の Hurwitz 整性”, 第 15 回 愛知数論セミナー 2014 年 6 月 14 日 (土) 午後 2:30 ~ 5:00 頃場所: 愛知工業大学本山キャンパス 3 階 大学院講義室 2 (306 号室)

【図書】(計 0 件)

【その他】(計 4 件) ホームページ等

[他 1] 成果の一部を公表してゐる Web page: <http://www.meijo-u.ac.jp/~yonishi/#publications> (maintained by Y.Ônishi) “Non-Galois CM”, <http://www.meijo-.ac.jp/>

[他 4] Y.Ônishi : “The sigma function of a general curve of genus two”, 3, June 2016 <http://www.meijo-u.ac.jp/>

6. 研究組織

- (1) 研究代表者
大西 良博 (Ônishi Yoshihiro)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号: 60250643
- (2) 研究分担者
なし
- (3) 連携研究者
なし