

平成 30 年 5 月 21 日現在

機関番号：16101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400013

研究課題名(和文) 数論的特殊元による岩澤加群の構造解析

研究課題名(英文) Analysis of the structures of Iwasawa modules by arithmetic special elements

研究代表者

高橋 浩樹 (TAKAHASHI, HIROKI)

徳島大学・大学院社会産業理工学研究部(理工学域)・教授

研究者番号：90291476

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、 $p$ 進ガロア表現に付随する岩澤加群の具体的な構造を特殊元を用いて調査し、総実代数体のGreenberg予想と一般代数体の一般Greenberg予想に対して詳しい成立理由を調査することであった。前者に関しては $p$ 分体と判別式 $D$ の二次体の合成体の円分 $Z_p$ -拡大に対する岩澤加群の構造について二次体の判別式が10未満(200未満)では600万から1300万(30万から60万)の範囲で計算し、実際の数が予測値に近似すること、後者に関しては $4p$ 分体に対する二次のMilnor  $K$ 群について $p$ 単数群のペアリングを $p < 32768$ の範囲で計算し非自明な零の個数は予測値に近似することを確認した。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research was to investigate concrete structures of Iwasawa modules associated to various  $p$ -adic Galois representations by using special elements, and to clarify detailed reasons of Greenberg's conjecture for totally real number fields and Greenberg's generalized conjecture for general algebraic number fields. Concerning the former conjecture, we computed structures of Iwasawa modules for cyclotomic  $Z_p$ -extensions of composite fields of  $p$ -cyclotomic fields and quadratic fields with the discriminant  $D < 10$  (resp.  $D < 200$ ) in the range  $6,000,000 < p < 13,000,000$  (resp.  $300,000 < p < 600,000$ ), and checked that the actual numbers are close to the expected numbers. Concerning the latter conjecture, we computed pairing of  $p$ -unit groups of  $4p$ -cyclotomic fields for Milnor  $K_2$ -groups in the range  $p < 32768$ , and checked that the actual numbers of nontrivial zeros are close to the expected numbers.

研究分野：整数論

キーワード：Greenberg予想 一般Greenberg予想 岩澤加群 円単数 岩澤不変量

### 1. 研究開始当初の背景

本研究の背景になっている円分体の岩澤理論における 2 つの未解決予想 (Greenberg 予想、Vandiver 予想) は、岩澤理論の用語により次のように記述される Greenberg 予想「総実代数体の岩澤不変量と  $\mu$  不変量は 0」、Vandiver 予想「特に  $p$  円分体の実部分体の 3 つの岩澤不変量は全て 0」。

市村氏と筆者は、 $p$  進  $L$  関数と円単数および補助素数を用いた予想の効率的な判定法を与え、実二次体を主とした多くの円分体の Greenberg 予想の成立を上記の 2 例も含めて確認した。これは、二種類の特殊元と一種類の補助素数を用いて、個々の場合に  $A_n$  の位数の上界を求める手法である。なお、同時期に Kraft 氏と Schoof 氏、栗原氏も円単数および補助素数を用いた判定法を得ていたが、大きく異なるのは  $p$  進  $L$  関数という特殊元を積極的に利用して、円単数を局所単数群に埋め込んだ像としてとらえていた点である。この観点が有効となり、新たに Gauss 和と補助素数を用いることによって、 $A_n$  の正確な位数を求める計算方法に発展した。これは、三種類の特殊元と二種類の補助素数を用いることにより、高速 Fourier 変換によって類数やイデアル類群を効率よく計算する手法である。

Vandiver 予想は 150 年ほど前に Kummer 氏が問題として取り上げたものであり、近年 Buhler 氏らによって 1 億 6000 万以下までの素数で予想が成立することが計算機によって確認された。その一方で、Cohen-Lenstra タイプの推論 (GTM83, p.159) による反例の個数の算定方法を用いれば、 $p_1$  から  $p_2$  までの Vandiver 予想の反例の期待値は  $(\log \log p_2 - \log \log p_1) / 2$  個で与えられる。 $p_1=37$ ,  $p_2=1$  億 6,000 万とすると、わずか 0.827 個でしかなく、期待値が小さいために反例が得られなかった可能性がある。

そこで、期待値を増加させるために判別式が小さな二次体  $k$  に 1 の原始  $p$  乗根を添加した体を対象に含めた実験を継続的に行っている。ここで判別式が小さな体を考察するのは、計算量が判別式に比例する箇所があるためであり、二次体を考察するのは付随する Dirichlet 指標の値が有理数でないときには、明らかに  $p$  分体と異なる現象が起こる場合があるためである。その結果、判別式  $f$  の絶対値が 200 以下の 122 個の二次体と  $200 < p < 250,000$  の範囲に対して、52 個の  $K=Q(\sqrt{f}, \cos(2\pi/p))$  に対し非自明な  $p$  部分を持つイデアル類群の存在が確認された。期待値は実際の値と非常に近い 52.01 個であり、少なくとも上記の範囲では上記の算出方法は肯定的であった。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、円単数、Gauss 和、Stickelberger 元、Beilinson 元、Eisenstein イデアルなどに代表される数論的特殊元たちを系統的に利用することによって、代数体上のガロア表現から構成される岩澤加群の構造を具体的に調査し、それらの対象に関する未解決予想の成立理由を明らかにすることである。特に、近年 Sharifi 氏によって予想された新たな視点とともに、一般 Greenberg 予想と呼ばれる岩澤加群の擬有限性予想について、その加群を商とするより大きな岩澤加群に関する問題として捉えることにより、解決の道を探る。

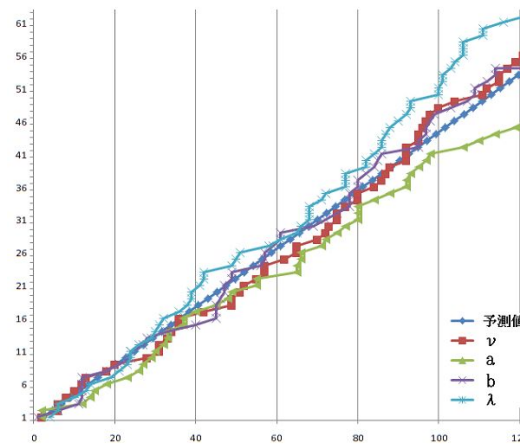
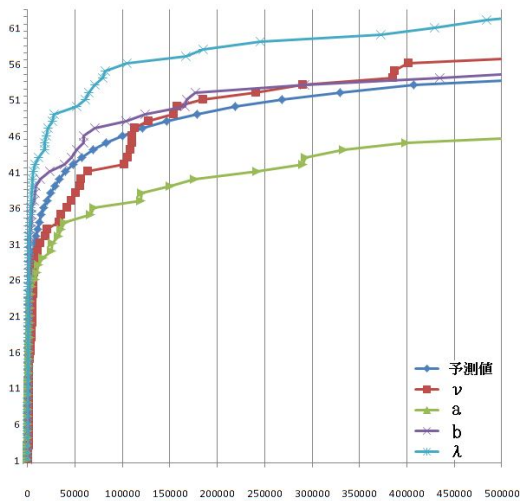
### 3. 研究の方法

有理数体上の Abel 拡大  $K$  上の  $p$  の外不分岐な  $p$  拡大のイデアル類群には、様々な数論的特殊元が関わっている。これらの特殊元を用いて一般 Greenberg 予想を調査し、様々な拡大方向における擬有限性やイデアルの単項化などの具体的な現象を把握する。特に、Sharifi 氏が発展させた 1 次元コホモロジー群同士のカップ積について、関係している保型形式の  $p$  進  $L$  関数の挙動やプラス部分への像について実例を挙げて詳しく調査する。

Sharifi 氏によるカップ積の数値計算により、 $K$  上のほとんどの  $p$  拡大において類数の  $p$  部分は増加せずイデアルが単項化する実例が与えられている。もし一般 Greenberg 予想の反例があるとすれば、逆にほとんどの拡大において類数の  $p$  部分は増加することになるため、この現象は一般 Greenberg 予想よりもずっと強い擬有限性を示唆している。どの程度まで強い擬有限性を持ちうるかについて、一般の  $Z_p$ -拡大における岩澤加群の有限性に関する  $p$  単数群のコホモロジー群の必要条件と比較して、信頼性の高い精密な予想を定式化したいと考えている。

### 4. 研究成果

Vandiver 予想、総実代数体の Greenberg 予想に関連して、二次体に 1 の原始  $p$  乗根を添加した体の円分  $Z_p$ -拡大に対する岩澤加群の構造について、二次体の判別式の絶対値が 10 未満に対しては 1300 万までの素数の範囲、判別式の絶対値が 200 未満に対しては 60 万までの素数の範囲において計算機による調査を継続的に実行した。後者において発見された例外的な実例の個数は順調に増加し、予測値に近似する値であることを確認した。また、判別式の絶対値が 200 未満に対して 50 万までの素数の範囲の計算結果の再チェックを終了した。



例外的な実例の個数と予測値 ( $p < 50$  万)  
(上図横軸：素数、下図横軸：判別式)

一般 Greenberg 予想に関連して、その背景となるコホモロジー群および  $K$  群との対応について実験および考察を進めた。 $p$  分体の整数環の Milnor  $K$  群から  $K$  群への写像の全単射性は  $p$  部分に限れば成立する可能性が高く McCallum-Sharifi 予想と呼ばれている。 $4p$  分体に対する類似の問題も興味深く、 $4p$  分体に対する二次の Milnor  $K$  群について  $p$  単数群のペアリングを計算して、自明と呼べる零の存在を明らかにし、非自明な零の個数は均等性を基にする予測値にほぼ近似する値であることを確認した。この計算結果は、一般 Greenberg 予想の成立を支持するものであると言える。さらに、 $p$  分体では得られなかつ

$k$	0	1	2	3
$\#z'' = k$	1356	343	46	3
ratio	0.776	0.196	0.026	0.0017
$Po(\lambda = 1/4)$	0.779	0.195	0.024	0.0020

$k$	0	1	2	3
$\#z'' = k$	1346	356	41	5
ratio	0.770	0.203	0.023	0.0028
$Po(\lambda = 1/4)$	0.779	0.195	0.024	0.0020

$k$	0	1	2	3	4	5
$\#z'' = k$	1059	538	116	28	4	1
ratio	0.607	0.308	0.066	0.016	0.0023	0.00057
$Po(\lambda = 1/2)$	0.607	0.303	0.076	0.013	0.0015	0.00015

非自明な零の個数  $z''$  の割合と予測値 ( $p < 2^{15}$ )

た実円分体の類数の非自明性に由来する零の存在が  $p=379$  に対して確認できた。

また、岩澤加群の構造解析に密接に関わる問題として、正規整数基底問題がある。一般に総実代数体の不分岐アーベル拡大は、2-elementary 拡大を除き正規整数底を持たないことが証明されている。論文 1 では、実アーベル体に対し 2-elementary 拡大が正規底を持つか否か、さらにそれを円分  $Z_2$  拡大によって持ち上げるにより正規底を持つか否かをイデアル類群の位数の初期レベルでの安定化の条件のもとで判定する命題を得た。上記の条件下では、0, 1, 2 のレベル以上で正規底を持つようになるか、どのレベルでも正規底を持たないかの 4 タイプに分かれる。具体的に判定するためには  $p$  進  $L$  関数、円単数などの特殊元が用いられており、10000 以下の素数分体に含まれる 3 次アーベル体に対するデータを得た。

さらに、ある種の無限個の円分体に対する岩澤不変量の決定問題においても、手法は異なるものの特殊元が有効に利用され解決された。具体的には、論文 2 において導手が  $3p^{n+1}$  または  $4p^{n+1}$  の円分体の岩澤  $_2$ -不変量の対応部分を  $p < 600$ 、全ての  $n$  について決定した。なお、一例を除いてこれらの岩澤不変量は導手が  $3p$  または  $4p$  の岩澤不変量の対応部分と一致することが確認された。この現象は 600 以上の全ての素数  $p$  についても成立することが期待されている。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

1. H. Ichimura, H. Sumida-Takahashi, Normal integral basis of an unramified quadratic extension over a cyclotomic  $Z_2$ -extension, Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux, Vol.28, No.2, 査読有, 2016, pp.325-345
2. H. Ichimura, S. Nakajima, H. Sumida-Takahashi, On the 2-adic Iwasawa lambda invariants of the  $p$ -cyclotomic fields and their quadratic twists, International Journal of Number Theory, Vol.10, No.2, 査読有, 2014, pp.283-296

[学会発表](計 5 件)

1. 高橋浩樹, 円単数・ガウス和と岩澤加群, 代数的整数論研究集会, 2017 年 6 月 18 日, 千葉
2. 高橋浩樹, 円分体の一般 Greenberg 予想と  $K$  群の特殊元, 九州代数的整数論 2017, 2017 年 3 月 10 日, 福岡
3. 高橋浩樹, 円分体の特殊元と岩澤不変量, 北陸数論研究集会, 2015 年 12 月 26 日, 石川
4. 高橋浩樹, 代数体の岩澤不変量について, 愛媛大学代数セミナー, 2014 年 5 月 26 日, 愛媛

5.高橋浩樹, 円分体の一般 Greenberg 予想に関するある計算法, 大阪大学整数論・保型形式セミナー, 2014年5月23日,大阪

〔その他〕

ホームページ等

<http://hiro2.pm.tokushima-u.ac.jp/~hiroki/major/galois1.html>

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

高橋 浩樹 (TAKAHASHI HIROKI)

徳島大学・大学院社会産業理工学研究部

(理工学域)・教授

研究者番号：90291476

### (2)研究分担者

( )

研究者番号：

### (3)連携研究者

( )

研究者番号：

### (4)研究協力者

( )