様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号： １３３０１
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2013～2015
課題番号： ２５４０００１４

研究課題名（和文）高種数のモジュラー形式環と代数的組合せ論

研究課題名（英文）Graded rings of modular forms in higher genera and algebraic combinatorics

研究代表者
大浦　学（Oura, Manabu）

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：５０３４３３８０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：モジュラー形式と代数的組合せ論の境界部分部で研究を行ってきた。２元体上自己双対重偶符号の重み多項式はある有限群の不変式となっている。ここで現れる有限群の中心化環の構造を小須田雅と共同で決定した。本村統吾と共同でZ4符号に対応するE-多項式が生成する環の生成元を決定した。小関道夫とともに、長さ８５の extremal な自己双対重偶符号から得られる extremal な格子の高種数のテータ関数について研究を行い、特に種数４ではそれらが異なることを示した。

研究成果の概要（英文）：We have work in the boundary between the theory of modular forms and that of algebraic combinatorics. With Masashi Kosusa, we determined the structures of the centralizer rings of the tensor representation of the group associated to Type II binary codes. With Togo Motomura, we determined the generators of the garded ring of E-polynomials associated to Type II Z4-codes. With Michio Ozeki, we studied the theta series of five extremal Type II lattices of rank 85 and showed that they are distinct in genus four.

研究分野： 代数的組合せ論

キーワード： E-多項式　符号　モジュラー形式　中心化環

１．研究開始当初の背景

符号の重み多項式がその双対符号の重み多項式と関連して計算できるという MacWilliams 恒等式の発見（１９６２）を我々の研究の出発点とする。もともと符号理論は通信・情報の分野からスタートしたのであるが、代数的色彩を帯び、我々の取り扱いは全く代数的である。１９７０年、Gleason により自己双対重偶符号の重み多項式によっ生成される環は、ある有限群の不変式環と一致することが示される。ここに現れる有限群は複素鏡映群と呼ばれるクラスの一つであり、不変式環が重み付き多項式環となる。さらに１９７２年、Broue-Enguehard らは自己双対重偶符号の重み多項式にある種のテータ関数を代入することでモジュラー形式が得られるという事実にたどり着く。
以上の研究は、我々の言葉では種数１の場合にあたる。モジュラー形式の理論では種数の概念は古くからあったが、重み多項式に対する種数の概念が上記の拡張としてはっきりとらえられるのは１９９０年前後と思われる。W.C.Huffman, N.J.A.Sloane, W.Duke、F.Hizerburch、N.Herrmann、B.Runge らの名前を挙げることができるが、我々の研究の基盤とするのは Runge の研究(１９９３、１９９５、１９９６)である。そこで得られている結果を述べる。自己双対重偶符号の種数１の重み多項式は、ある複素鏡映群の不変式環と一致することを述べた。Runge は自己双対重偶符号の一般種数の重み多項式が生成する環が、ある有限群（の系列）の不変式環と一致することを示した。ただし、種数１の場合はそこに現れる有限群は複素鏡映群であったが、この事実は種数２まで同様であり、種数３以上の場合に現れる有限群はもはや複素鏡映群ではない。また、種数１の場合同様、モジュラー形式の構成も与えた。自己双対重偶符号の一般種数の重み多項式に適当なテータ関数を代入することにより、同じ種数のジーゲルモジュラー形式が得られる。一方、Runge はジーゲルモジュラー形式環全体を与える定理も与えた。これを次に詳しく述べる。
自己双対重偶符号の種数 g の重み多項式環は、ある有限群 Gg の不変式環と一致する。Gg の指数２の部分群 Hg があって、Hg の不変式を考えよう。Hg の不変式は Gg の不変式環よりも大きく、自己双対重偶符号の重み多項式だけでは記述できない元を含む。Runge は次のような定理を与えた。Hg の不変式にある適当なテータ関数を代入すると種数 g のジーゲルモジュラー形式が得られる。ここで得られた環をその商体内で正規化すると種数 g のジーゲルモジュラー形式環が得られる。すなわち、ジーゲルモジュラー形式環を得るためには、有限群 Hg の不変式環、テータ関数の間に成り立つ関係式、およびそれらで得られる環の正規化、という３ステップで得られることを示した。モジュラー形式の理論において、それらが生成する次数付き環を決定する問題は基本的ながら難しく、種数２の場合は井草準一（１９６２）、種数３の場合は露峰茂明（１９８６）らによって次数付き環の生成元、次元公式が知られているのみである。ただし、ここで考えているのは full Sigel modular 群の場合のみである。Runge は種数３までの有限群の不変式環の次元公式を与え、種数３のジーゲルモジュラー形式環は H3 不変式環をあるイデアルで割った形でとらえた。正規化の必要はなかった。ここで現れるイデアルであるが、それは二つの自己双対重偶符号 e8 と d16 の種数３の重み多項式の差で記される。これは種数４におけるいわゆる Schottky 関係式を与えるものである。
大浦（１９９７）は種数４の場合の有限群 H4 の次元公式を与えた。Oura-Fraitag（２００１）は種数４、重さ１２のジーゲルモジュラー形式の間に成り立つ関係式を与えた。Oura-Poor-Yuen（２００８）は種数４、重さ１６のジーゲルモジュラー形式の間に成り立つ関係式を与えた。Oura-Salvati Manni（２００８）は種数４の場合には正規化の操作が必要であることを示した。
ジーゲルの主定理によると、重さが４の倍数のアイゼンシュタイン級数は、その重さの even unimodular 格子の重さ付き一次結合で表すことができる。我々はこれをヒントとし、アイゼンシュタイン級数の組合せ論的類似（E-多項式）を定義した。これは２元体上の自己双対重偶符号に付随するものであり、やはりそれらの重み多項式の重さ付き一次結合で表される。我々は種数２の場合に E-多項式で生成される次数付き環の生成元を与えた（２００９）。

２．研究の目的

我々の研究はモジュラー形式の理論と代数的組合せ論の境界部分にて行われる。片方で得られた結果をもう片方の分野への応用を考える。それぞれの分野が重要であり、分野間を超えた応用は新しい見方も与えてきていると思う。
今回の研究は、これまでの研究を引継ぎ、さらなる発展を目指すものである。具体的には自己双対重偶符号の高い種数の重み多項式、高い種数のジーゲルモジュラー型式、およびそれらのなす環、モジュラー形式と代数的組合せ論の有機的研究などである。
種数の高いモジュラー形式に関しては、具体的にフーリエ係数を計算し、それらが持つ性質を明らかにしていく。高い種数のジーゲルモジュラー形式環のある重さのなすベクトル空間の構造を明らかにしていく。
アイゼンシュタイン級数の組合せ論的類似として考えている E-多項式について、多くの場合に計算を行い、その持つ性質を明らかにする。符号理論から離れて、適当なクラスの有限群に対して E-多項式の理論が構成できないか、調べる。

我々の研究に現れる有限群 Gg, Hg は２元体上の自己双対重偶符号に対するものである。他のクラスの符号に対しては、別の有限群の系列が現れるので、それぞれの場合に研究が必要である。

３．研究の方法

モジュラー形式の研究においては、フーリエ係数を計算することが重要である。我々の場合、符号や格子の持つ性質を利用することにより、それらを求めていく。格子のテータ関数、符号の重み多項式を最大限利用して、求めるべきモジュラー形式の形を定めていく。この場合、ケースバイケースに現れる有限群を有効的に利用することを考えたい。

有理整数の元を２を法とした有理整数環の剰余環への写像を考える。これの直積を考える。有理整数環を２を法として割った剰余環は自然に２元体と考えることができる。そこで２元体上の符号を考え、その引き戻しを考える。そしてルート２でわって、格子が得られる（Construction A)。この対応を考えると、２元体上の自己双対重偶符号から even unimodular 格子が得られる。この考えを基本として、符号と格子の関係が得られる。符号の重み多項式に適当なテータ関数を代入したものが上記方法で得られた格子のテータ函数になることも知られている。このようにして、符号と格子の間の行き来が可能となる。

研究方法で述べておくべき点であるが、我々の研究において計算機の利用は本質的である。原理的に計算可能だが、実際は計算量などの問題から計算不可能となっている場合がある。我々はそこでとどまらずに、解決するための新しいアルゴリズムを考えたり、問題の再設定を考えたりする。どのような方法かというと、一例を述べると有理整数上の問題であれば、適当な数を法とすることなどである。これにより、すぐに完全解決にたどり着くことは難しいかもしれないが、ある程度の結果の予想にたどり着くことも可能である。

計算ソフトについても述べておく。我々が主として用いるのは Maple と Magma で、ともに有償である。一般的に言って、Maple は解析的な面に強く、Magma は代数的・組合せ論的な面に力を発揮する。

４．研究成果

我々はモジュラー形式と代数的組合せ論の対応をみながら研究を行っている。モジュラー形式の典型的な例としてアイゼンシュタイン級数が知られている。アイゼンシュタイン級数の持つ性質として、一般的にジーゲルモジュラー形式のなす環を生成するのは不可能、つまりアイゼンシュタイン級数のみでは書き下せないジーゲルモジュラー形式があるが、ジーゲルモジュラー関数はアイゼンシュタイン級数ですべて書き下すことができる。ただし、ここで考えているのは偶数重みのジーゲルモジュラー形式のみであり、種数が低い所ではアイゼンシュタイン級数で全てのジーゲルモジュラー形式が書き下せることも知られている。ジーゲルの主定理の帰結の一つとして、種数ｇのアイゼンシュタイン級数は、even unimodular 格子の種数 g のテータ関数の一次結合で表されるというものがある。

我々は、我々が持つモジュラー形式と代数的組合せ論の対応において、アイゼンシュタイン級数に対応する組合せ論的対象がないことを埋めるため、アイゼンシュタイン多項式（E－多項式）と呼ぶ多項式を導入した。まずは２元体上の自己双対重偶符号に対する E-多項式を定義した。重さ m が８の倍数のとき、E-多項式は２元体上の長さmの自己双対重偶符号の重み多項式の一次結合で書き下すことができる（この事実は Nebe-Rains-Sloane の結果の簡単な帰結であり、宗政昭弘（２００２）に記述がある)。E-多項式の生成する環は有限生成であり、重み多項式たちの同じ重さの商は E-多項式たちの商として書き下すことができる。

符号理論、不変式環、モジュラー形式環の所で群 Gg，Hg を述べた。H1 は複素鏡映群である。小須田雅（琉球大）とともに H について詳しく研究を行った。H1 は位数９６で、２次正方行列からなる。さて、Weyl の本「Classical Groups」において、表現論と不変式論が関連付けられて述べられている。その思想に従うと、行列群の中心化環を考えるというのは自然な流れである。我々は H1 に対してこれを実行した。H1 は２次正方行列で、１６ 個の共役類を持つ。我々はまず、具体的に１６個すべての既約表現を構成した。この結果を利用して、各既約表現に対する不変式環について調べた。この方法による必要もないが、既約表現をすべて構成しているので、指標表が得られる。この指標表は以下の計算で利用される。ｆ次のテンソル積を考えよう。得られる 2^f 次の行列に対して、それらと可換な行列全体を集め、その構造を決定するのである。得られた結果は、あるサイズの行列環の直和と書く事ができる。さて、ここで得られたｆ次テンソル表現の中心化環の次元(f に依存した数列)であるが、その数列だけみると他の組合せ的解釈が知られている（Sloane のホームページ利用)。今までのところ、この関連性をはっきり記述できていないが、今後の研究課題を与えるものと考えている。

小関道夫と extremal 符号、高い種数のテータ関数について研究を行った。２元体上の自己双対重偶符号を考える。このとき、そのような自己双対重偶符号が持つ最小距離には限界が知られており、長さを n とした場合、4[n/24]+4 以下である。最小距離がこの限界に一致するような符号を extremal と呼ぶ。Even unimodular 格子に対しても同様な限界

が知られており、その場合、2[n/24]+2 であり、その限界に達する格子は extremal と呼ばれる。長さ３２の自己双対重偶符号はすでに分類が完成しており、８５のクラスに分けられる。
我々はまず、Hecke, Schoneberg, Venkov らによる方法に従い、高い種数のテータ関数のフーリエ係数の計算について、詳しく調べた。長さ３２の extremal な even unimodular 格子について種数４までの具体的な計算方法、計算結果を示し、例えば種数４の Schottky モジュラー形式のフーリエ係数を与えた。Salvati Manni の結果からある特別なフーリエ係数がわかると Schottky モジュラー形式との関連性がわかるのである。これらは次の論文の準備といえるが、これ自身、非常に興味ある結果を思われる。
小関道夫とともに、さらなる研究を行った。まず、一般的な問題設定を説明する。二つの格子をとったとき、同値な格子であればテータ関数は一致するが、非同値でも一致する場合がある。格子を符号、テータ関数を重み多項式と置き換えて考えることもできる。また、２つではなくいくつかのテータ関数を考えて、それらが一次独立か否か、という問題設定も可能であり、我々も関連した結果を出している。そしてこの問題は種数をあげて考えることができる。長さ３２の extremal even unimodular 格子の種数３までのテータ関数は一致する(Erokhin、１９８２)。種数４では長さ３２の２つの extremal even unimodular 格子の差は Schottky モジュラー形式の２乗の定数倍であることも知られている（Salvati Manni２０００)。我々の場合に戻ろう。長さ３２の自己双対重偶符号は８５のクラスに分けられるのだが、そのうち５クラスが extremal である。これらから construction B を用いて５つの長さ３２の extremal even unimodular 格子を得ることができる。我々はこの５つの格子のフーリエ係数を計算することにより、種数４ではこれらすべてが異なることを示した。また、この論文の中では今までの重み多項式とは異なる多項式を定義した。Intersection enumerator と名付けられたものがそうである。テータ関数が２次形式の表現数の母関数の意味合いをもつのに対し、intersection enumerator もある種の母関数としてとらえられるのである。この多項式の研究は今後の課題とする。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

(1)Masahi Kosuda, Manabu Oura,
Centralizer algebras of the primitive unitary reflection group of order 96,
Tokyo Journal of Mathematics に掲載確定.
査読あり。
http://sphere.s.kanazawa-u.ac.jp/ComH1.pdf

(2)Manabu Oura, Michio Ozeki,
A numerical study of Siegel theta series of various degrees for the 32-dimensional even unimodular extremal lattices,
Kyushu Journal of Mathematics に掲載確定.
査読あり。
http://sphere.s.kanazawa-u.ac.jp/siegel-32g3.pdf

(3)Manabu Oura, Michio Ozeki,
Distinguishing Siegel theta series of degree 4 for the 32-dimensional even unimodular extremal lattices,
Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg,
86(2016), 19-53.
DOI 10.1007/s12188-016-0120-y
査読あり。

(4)Manabu Oura,
Eisenstein polynomials associated to binary codes (II),
Kochi Journal of Mathematics,
11(2016), 35-41.
査読あり。
http://sphere.s.kanazawa-u.ac.jp/EpolyKochi.pdf

〔学会発表〕（計７件）

(1)整数論に触発された組合せ論,
大浦　学,
第２回金沢・山口数学合同研究集会 ～幾何学とその諸分野への応用～,
2015 Dec 19,
金沢大学サテライトプラザ.

(2)行列の中心化環,
大浦　学,
数理科学セミナー,
2015 Jun 17,
高知大学.

(3)有限群の不変式とモジュラー形式,
大浦　学,
北陸数論セミナー (世話人：野村明人, 菅野孝史, 木村巌, 藤井俊),
2015 Apr 16,
金沢大学サテライトプラザ.

(4)Theta series of even nimodular extremal lattices,
大浦　学,
2015 早稲田整数論研究集会 (研究代表者：小松啓一, 橋本喜一朗, 尾崎学, 坂田裕),
2015 Mar.20,

早稲田大学.

(5)テータ関数、有限鏡映群、組合せ論,
大浦　学,
琉球大学理学部数理科学科談話会,
2015 Mar.10,
琉球大学.

(6)テータ関数から拡がる組合せ論,
大浦　学,
数理学談話会,
2014 Nov.12,
金沢大学.

(7)E-多項式について,
大浦　学,
RIMS 研究集会「有限群とその表現、頂点作用素代数、代数的組合せ論の研究」（研究代表者　澤辺正人）,
2014.Mar.6,
京都大学数理解析研究所.

〔その他〕
ホームページ等
http://sphere.s.kanazawa-u.ac.jp/index.html
http://sphere.s.kanazawa-u.ac.jp/index-e.html

６．研究組織
(1)研究代表者
大浦　学（OURA MANABU）
金沢大学・理工研究域数物科学系・教授

研究者番号：50343380