様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４０００１５

研究課題名（和文）保型表現の数論的構造と内視論

研究課題名（英文）Arithmetic structure of automorphic representations and endoscopy

研究代表者
今野　拓也（KONNO, Takuya）

九州大学・数理（科）学研究科（研究院）・准教授

研究者番号：００２７４４３１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：保型形式の周期やフーリエ係数などは，保型表現の周期積分やWhittaker模型などとして，広く拡張されている．前者が持っていた有理性などの数論的性質を保型表現に対して展開するため，保型表現やそれにまつわる局所的な不変量の記述を目指した．近年，古典群の保型表現は（ひねり付きも含めた）内視論による記述が完成した．この内視論の局所理論をWhittaker模型や周期積分と相性が良い形で，低次の古典群の場合に計算した．さらに準分裂でない古典群の内視論を明示的に記述するため，一般の簡約アデール群の岩澤分解の存在をBruhat-Titsの建物を用いて示した．.

研究成果の概要（英文）：Periods and Fourier coefficients of automorphic forms are generalized to automorphic representations. We hope to extend the various arithmetic properties of former objects to automorphic representations. For this we need to describe local properties of automorphic representations. Recently, the automorphic representations of classical groups are classified in terms of the theory of (twisted) endoscopy. We revise the local theory of this classification for low rank groups using specific normalizations which are useful for the study of periods. Further, to analyze automorphic representations of non-quasisplit groups, we prove the Iwasawa decomposition for general reductive adele groups using the Bruhat-Tits theory.

研究分野：代数学

キーワード：保型形式　テータ対応　L関数　周期　保型内視論

１．研究開始当初の背景

古典的な楕円カスプ形式f, あるいはそれに付随する$GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$のカスプ保型表現$\pi(f)$は, fの Fourier 係数から定まる代数体$\mathbb{Q}(f)$上で定義される．またモジュラー曲線の CM 点でのfの値, すなわち虚二次体に対応する極大トーラス$T \subset GL_{2,\mathbb{Q}}$のアデール空間$T(\mathbb{Q})\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times} \setminus T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$に沿っての周期積分は適当なアルキメデス因子を除いて$\mathbb{Q}(f)$に属していた. こうした理論を一般の代数体F上で定義された簡約代数群Gのアデール群$G(\mathbb{A})$の保型表現に対しても展開することには強い整数論的動機があり, ここ 10 年間ほどの間に次のような重要な進展があった.

$G(\mathbb{A})$の保型表現の記述
一般線型群$GL_n(\mathbb{A})$の保型表現が付随する Rankin-Selberg 積 L 関数で分類されることは 1980 年代に知られていた. 一般の簡約代数群Gの場合には，$G(\mathbb{A})$の複数の既約表現が L 関数を共有する**L 不可分性**の現象が起きる．そこで$G(\mathbb{A})$の既約表現の同型類の集合を，互いに L 関数を共有すると目されるものからなる**L パケット**の直和集合に分割し，各 L パケットのどの元が保型表現であるかを L 関数と**内視論**で記述するというプログラムが提出されている.
内視論ではGと共役類間の適当な関係がある内視群と呼ばれる簡約代数群Hの族を導入し，この共役類間の関係により$H(\mathbb{A})$上の安定超関数の$G(\mathbb{A})$上の不変超関数への**内視リフティング**が構成できると予想する(**基本補題予想**)．この内視リフティングにより, $H(\mathbb{A})$の L パケットΠ_Hに対して$G(\mathbb{A})$の L パケットΠが定まって指標の間の線型関係式

$$tr\Pi_H(f_H) = \sum_{\pi \in \Pi} \delta(H,\pi) tr\Pi(f)$$

が得られると予想され，この係数$\delta(H,\pi)$たちとΠに付随する L 関数で各$\pi \in \Pi$の保型形式の空間における重複度が記述されると期待する.
このプログラムには L パケットの定義など未解決の部分もあるが， Gが斜交群や直交群, ユニタリ群の場合には, G自身を一般線型群の**ひねり付き内視群**と見ることができ, すでに保型表現が記述されている一般線型群との間の指標関係式とGの内視論を組み合わせて，$G(\mathbb{A})$の L パケットおよびその各元の重複度を決定できる．当研究を開始した頃には，斜交群および直交群の保型表現の記述が Arthur 自身によって,ユニタリ群の場合の記述が Mok によってそれぞれアナウンスされていた.

周期積分の研究
Waldspurger の公式として知られる$GL_2(\mathbb{A})$の保型表現の極大トーラスのアデール空間に沿っての周期積分は，中心を除いて考えれば，$SO_{2,1}(\mathbb{A})$の保型表現とその部分群$SO_2(\mathbb{A})$の保型表現(指標)の間の Petersson 内積とみなせる．これを踏まえ，**Gross-Prasad** は$SO_n(\mathbb{A})$とその部分群$SO_{n-1}(\mathbb{A})$の保型表現の間の Petersson 内積の非消滅に関する予想を提出した．さらに$SO_n(\mathbb{A})$の保型表現の退化 Fourier 係数と部分群$SO_m(\mathbb{A})$の保型表現との Petersson 内積の場合に予想を拡張した. 彼らの予想は, 保型表現の局所成分をなす局所体K上の$SO_n(K) \times SO_m(K)$の既約表現上の$SO_m(K)$不変汎関数についての局所予想と，Fの各素点vに対する局所$SO_m(F_v)$不変汎関数の族が大域的な Petersson 内積を与えるための条件についての大域予想からなる.
池田・市野は Waldspurger の公式にヒントを得て，局所不変汎関数の自然な正規化の方法を与え，Gross-Prasad 大域予想における Petersson 内積を，正規化局所汎関数の Euler 積と保型 L 関数値で表す予想を提出した．これに際して市野は，齋藤・黒川リフトのようにかなり複雑なものも含めた多くの古典的保型形式の場合に彼らの予想が成り立つことを確かめている.
本研究開始前には, Gan-Gross-Prasad によって Gross-Prasad 予想がユニタリ群の場合も含めて一般化され，さらに近年の保型表現の内視論的分類を踏まえた形に精密化された．これらの予想の解決には，Jacquet とその同志たちによって提唱された相対跡公式が有望な方法であり，関連する(言うなれば)相対調和解析が開発，研究されてきた. 一方で Waldspurger は前出の不変汎関数を Arthur の重み付き軌道積分に結びつけることで, 通常の群上の調和解析により, 局所 Gross-Prasad 予想の証明に成功した.

２．研究の目的

この研究の目的を一言で述べるならば，先の Gan-Gross-Prasad 予想，さらに可能ならば池田・市野予想を, 低階数の群には限るが，しかし広い範囲の保型表現に対して実現することである.

まず, 局所 Gross-Prasad 予想では，局所体K上で$SO_n(K) \times SO_m(K)$の L パケット$\Pi \otimes \Pi'$が$SO_m(K)$不変汎関数を持つための条件が, $\Pi \otimes \Pi'$の積の L 関数のε因子の符号で与えられることを予想している．そのとき背景で触れた Waldspurger の結果により，$\Pi \otimes \Pi'$の元$\pi \otimes \pi'$で$SO_m(K)$不変汎関数を持つものがただ一つ存在する．局所予想ではこの元を内視論の言葉で特徴付けている．これは通常の表現論の上に構築されてきた内視論と，L 関数の積分表示に代表される相対調和解析を融合するものだが，そのための具体的な方策はほとんど知られていないと言ってよい. 実際, 局所予想が確かめられていた$SO_3(K) \times SO_2(K)$ (Waldspurger)や

$GSO_4(K)\times GSO_3(K)$（市野)などの場合は，考察する代数群が本質的にGL_2やその内部形式に帰着され，内視論の影響が自明になっている．そこで，$SO_4(K)\times SO_3(K)$や$U_2(K)\times U_1(K)$，$U_3(K)\times U_2(K)$など，すでに予想が知られている場合にごく近いが，内視論の効果が見て取れる場合に局所予想を検証することを最初の目標とした.

ここで原点であったWaldspurgerの公式の証明に見られるように，周期積分の計算は``seesaw duality”の議論により，保型形式のテータ（Weil）リフティングと深く関係している．周期積分を用いてテータリフティングの非消滅を示す，あるいは逆にテータリフティングにより周期積分をリフティングされる保型形式の Fourier 係数などに帰着するなどの議論は古くから行われてきた.このメカニズムと局所Gross-Prasad予想を突き合わせれば，ユニタリ群の間の局所テータ対応が標準 L 関数のε因子の符号と内視論の言葉で記述できるという，Prasad の予想に自然に行き当たる．斜交（メタプレクティク)群と直交群の間の局所テータ対応に対しても類似の予想が考えられる．これらの予想も内視論と相対調和解析との融合を課題とする問題であり，特に低階数の群に対しては Gross-Prasad 予想と同時に考察すべき目標である.

次に大域的な問題について考える.池田・市野の定式化によれば，保型形式の周期積分を保型表現内のベクトルの取り方によらず記述できるので，大域理論では保型表現内に，周期積分および局所周期を計算しやすい「テストベクトル」を得ることが第一の目的である．当研究で扱われる低階数の群の場合には，局所理論で考察した局所テータ対応を用いてこのテストベクトルを作ることを考えていた.なお,不分岐な素点における局所テストベクトルについては，すでに池田・市野によって一般的な構成が完成している．我々は分裂していない群の場合も考察するために，この構成の一部を馴分岐表現に拡張することも目的としていた.

３．研究の方法

既約表現の内視論的分類と周期（や局所周期）を結びつけるには,まず内視論側の精密化が必要である．局所的内視リフティングは定数倍を除いて定義されており，古典群に対する内視論の一般論では表現論的に見て手間の少ない正規化の方法が選択されている．これを Fourier 係数や周期積分の慣習と整合するような正規化で取り換え，特に使用する不変測度は(局所) 玉河測度を採用した考察を行った.

また，Arthurの古典群の保型表現を記述した論文では，一般線型群ひねり付き内視論による情報の不足をカバーするため，偶数次特殊直交群の代わりに直交群の方を扱っている．やはり我々の目的にはO_4ではなくSO_4の保型表現の記述が必要である.そこで情報の不足を回避するため，特殊直交群だけでなく，それを定義する二次形式付き空間のデータを用いた内視論の計算を行った.

研究開始当初はこれらから得られる指標関係式を用いて，$U_3(K)$や$SO_4(K)$に対する齋藤-Tunnell 型の指標公式を得ることを目標にしていた．その結果と Adams-Barbasch の議論の非アルキメデス類似により，局所テータ対応についての Prasad の予想を検証する計画であったが，いずれも研究時間を確保できず,実施できなかった.これらの計画については今後の課題としたい.

大域理論におけるテストベクトルの構成に向けて,馴分岐表現の理解が必要であった.ここで不分岐表現はいわゆる不分岐（準分裂）p進簡約群にしか存在しないのに対し，任意のp進簡約群は馴分岐表現を持つ.幾つかの例を考察するうちに，馴分岐表現を持つp進簡約群の構造は非常に多様であることがわかり，それらを群論的な言葉で統一的に扱うには Bruhat-Tits の建物を用いることが必要だと考えた.このため2015年度には Bruhat-Tits 理論をテーマとする勉強会を定期的に実施した．またこれによって得られたノウハウを用いて簡約アデール群の構造の考察も行った.

４．研究成果

まず 2013 年度に実施した整数論サマースクール「p進簡約群の表現論入門」の後半の主題が 3 変数ユニタリ群の保型表現の記述であったため,その準備も兼ねて,3変数ユニタリ群の内視論の考察を行った.

3変数ユニタリ群の明示的移行

p進体の2次拡大E/Fを固定してそのガロア群の生成元をσで表す.定数倍を除いて一意なE上の 3 次元エルミート空間$\big(V,(\,,)\big)$,（ $V=E^3$, $(z_1,z_2,z_3),(w_1,w_2,w_3))=\sigma(z_1)w_3+\sigma(z_2)w_2+\sigma(z_3)w_1$)を取り，そのユニタリ群を $G(F)=\{g\in\mathbb{M}_3(E)\mid(gv_1,gv_2)=(v_1,v_2),v_i\in V\}$を考える.
その極大トーラス$T\subset G$は3次元エタールE代数$\mathcal{A}_T\coloneqq Z_{\mathbb{M}_3(E)}(T)$とその上の第二種対合$\iota_T$の組で分類される．具体的には$F$の有限次拡大の族$\{F_i\}_{1\le i\le r}$で$\sum_{i=1}^r[F_i:F]=3$となるものがあって，$(\mathcal{A}_{\mathrm{T}},\iota_T)\simeq\bigoplus_i(E_i\coloneqq E\otimes_F F_i,\sigma\otimes id_{F_i})$となる．内視論を統括する T の E 群 $\mathfrak{E}(T)\coloneqq Im(H^1(F,T_{sc})\to H^1(F,T))$は次のようになる.
1. $[F_1:F]=3$ のとき， $T\simeq$

$Res_{F_1/F}U_{E_1/F_1}(1)$で$\mathfrak{E}(T)=1$.

2. $F_1=E$, $F_2=F$ のとき, $T\simeq Res_{E/F}\mathbb{G}_m\times U_{E/F}(1)$で$\mathfrak{E}(T)=1$.
3. $F_1\not\simeq E$は2次拡大, $F_2=F$のとき, $T\simeq Res_{F_1/F}U_{E_1/F_1}(1)\times U_{E/F}(1)$で$\mathfrak{E}(\mathrm{T})\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. $F_1=F_2=F_3=F$のとき, $T\simeq U_{E/F}(1)^3$で$\mathfrak{E}(\mathrm{T})\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$.

内視論の目的には E 群が非自明な後者 2 つの場合のみを扱えばよい. さらにケース 4 は 3 の記号で$F_1=F\oplus F$としたものと見て, この 2 つの場合を統一して扱える.
Fの Weil 群をW_Fと書けばGの L 群 ${}^LG=GL_3(\mathbb{C})\rtimes_{\rho_G}W_F$が定まり, Tの L 群 ${}^LT=(\mathbb{C}^\times)^3\rtimes_{\rho_T}W_F$も同様に定まる. F_1の非自明な対合的F代数自己同型をτと書き, $E_1=E\otimes_F F_1$内の$(\sigma\otimes id_{F_1})\circ(id_E\otimes\tau)$の固定部分代数を$E'$で表す. $E^\times$の指標μでE/Fに類体論で付随する$F^\times$二次指標$\omega_{E/F}$に制限されるものと, $E'^\times$の指標μ'で$\omega_{E'/F}$に制限されるものを取る. ただし$F_1=F\oplus F$のときは$\mu'=\mu$とする. このとき L 群の許容埋め込みと呼ばれる準同型ξ_T: ${}^LT\to{}^LG$で$w\in W_{E_1}\subset W_F$に対して

$$\xi_T\left(((z_1,z_2),z)\rtimes w\right)$$

$$=\begin{pmatrix} z_1\mu\mu'(w) & & \\ & z\mu^{-2}(w) & \\ & & z_2\mu{\mu'}^{-1}(w)\end{pmatrix}\rtimes w$$

であるものがある. 内視群はTと κ 群 $\mathfrak{K}(T)\coloneqq Im(\pi_0(\hat{T}^\Gamma)\to\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma))$の元の組に対して定義される:

$$\mathfrak{K}(T)=\begin{cases}\{(\pm(1,1),1)\} & F_1 \text{ は体}\\ \{\pm1\}\times\{\pm1\}\times1 & F_1\simeq F\oplus F.\end{cases}$$

ただしΓはFの絶対ガロア群を表す. すなわち$\kappa\in\mathfrak{K}(T)$に対して, その$\hat{T}^\Gamma$での逆像s_Tを取り, $s\coloneqq\xi_T(s_T)\in\hat{G}$の連結中心化群を$\hat{H}$とし, $\mathcal{H}\coloneqq\hat{H}\xi_T(W_F)\subset{}^LG$とおく. 内視群$H$はこの$\mathcal{H}$に同型な L 群を持つ準分裂連結簡約群であり, sと L 群の埋め込みξ: ${}^LH\simeq\mathcal{H}\hookrightarrow{}^LG$とからなる内視データ$(H,s,\xi)$の一部である. 今の場合は上記 3, 4 の$T$に対して, $\kappa=1$の場合は$(G,1,id)$, それ以外の場合は$H=U_{E/F}(2)\times U_{E/F}(1)$, $s=diag(-1,1,-1)$,

$$\xi((h,z)\rtimes w)$$

$$=\begin{cases}\begin{pmatrix} h\mu(w) & \\ & z\eta(w)\end{pmatrix}\times w & w\in W_E\\ \begin{pmatrix} & h\mu(ww_\sigma^{-1})\\ z\eta(ww_\sigma^{-1}) & \end{pmatrix}\rtimes \mathrm{w} & w\notin W_E\end{cases}$$

となる内視データ(H,s,ξ)が得られる. ここでμはξ_Tにある通りで, ηは勝手な$E^\times/F^\times$の指標である.
この後者の場合には, 上の記号でHの極大トーラス$T_H\simeq Res_{F_1/F}U_{E_1/F_1}(1)\times U_{E/F}(1)$に対して, その$G$への許容埋め込み

$$\eta_{T_H}: T_H(F)\ni(zz',z_0)$$

$$\to\begin{pmatrix} xz & & \Delta'yz/\delta\\ & z_0 & \\ yz\delta & & xz\end{pmatrix}$$

$$\in T(F)\subset G(F)$$

がある. ただし$z\in E^\times$, $z'=x+y\delta'\in E'^\times$は$\mathrm{N}_{E/F}(z)\mathrm{N}_{E'/F}(z')=1$をみたすもので, $\delta'=\sqrt{\Delta'}$はE'/Fの生成元である. $G(F)$内の正則半単純元の集合を$G_{rs}(F)$, $H(F)$内の``G正則”半単純な元の集合を$H_{G-rs}(F)$で表す.
以上のもとで$\gamma_H=(zz',z_0)\in H_{G-rs}(F)$の中心化群を$T_H$, $\gamma_0:=\eta_{T_H}(\gamma_H)\in G_{rs}(F)$とすれば, G, (H,s,ξ)に対する移行因子は

$$\Delta(\gamma_H,\gamma)$$

$$=\mu\left(\frac{(zz'-z_0)(z\sigma(z')-z_0)}{-z_0}\right)\eta_u(z_0)$$

$$\times\kappa\left(inv(\gamma_H,\gamma)\right)^{-1}$$

で与えられる. ただしμ, ηはξ: ${}^LH\hookrightarrow{}^LG$の定義中の指標であり, $\eta_u: U_{E/F}(1,F)\to\mathbb{C}^\times$は$\eta_u(z/\sigma(z))=\eta(z)$で与えられる指標である. また γ_0 の安定共役類の元$\gamma=h^{-1}\gamma_0h\in G_{rs}(F)$, $(h\in G_{der}(\bar{F}))$に対して, $T_{Der}(\bar{F})\coloneqq(T\cap G_{der})(\bar{F})$値1コサイクル$\{h\varsigma(h)^{-1}\}_{\varsigma\in\Gamma}$の$H^1(F,T_{der})$でのクラスを$inv(\gamma_H,\gamma)$と書き, $\kappa\in\mathfrak{K}(T)$は Tate・中山双対性により$\mathfrak{E}(T)$の指標とみなしている.
方法の項に書いたようにこれを用いての局所 L パケットの記述を行っており, その結果を論文にまとめる予定である. さらにそれを用いた明示的な局所テータ対応の記述が今後の課題である.

SO_4の内視論

Fをp進体とする. F上の四元数環$\mathcal{B}$を取り, その被約ノルムを$\nu_\mathcal{B}:\mathcal{B}\to F$と書く. 準同型

$$\nu:\mathcal{B}^\times\times\mathcal{B}^\times\ni(g_1,g_2)\mapsto\nu_\mathcal{B}(g_1g_2^{-1})\in\mathbb{G}_m$$

の核を$(\mathcal{B}^\times\times\mathcal{B}^\times)^1$で表せば, 二次形式付き空間$(\mathcal{B},2\nu_\mathcal{B})$の特殊直交群$\bar{G}$は同型

$$\rho:(\mathcal{B}^\times\times\mathcal{B}^\times)^1/\Delta\mathbb{G}_m\ni(g_1,g_2)$$

$$\to(x\mapsto g_1xg_2^{-1})\in\bar{G}$$

により, $(\mathcal{B}^\times\times\mathcal{B}^\times)^1$を対角に埋め込まれた乗法群で割った商群に同型である. $\bar{G}$の導来群(自分自身)は単連結でないので, 内視論においては代わりにその z 拡大$G\coloneqq(\mathcal{B}^\times\times\mathcal{B}^\times)^1$を考えることになる. $\tilde{G}\coloneqq\mathcal{B}^\times\times\mathcal{B}^\times$とおく.
任意の極大トーラス$T\subset G$は$\mathcal{B}^\times$の極大トーラス$T_i\simeq Res_{E_i/F}\mathbb{G}_m$, ($E_i/F$は2次元エタール代数, $i=1,2$) の直積 $\tilde{T}\coloneqq T_1\times T_2\subset\tilde{G}$と$G$の交わりである. その E 群は$\mathfrak{E}(T)=H^1(F,T)\simeq F^\times/\nu(\tilde{T}(F))$で与えられ, $\gamma\in$

$T(F)\cap G_{rs}(F)$の安定共役類は全単射

$$Ad(G(\bar{F}))\gamma/Ad(G(F)) \ni \tilde{g}^{-1}\gamma\tilde{g} \mapsto \nu(\tilde{g}) \in F^\times/\nu(\tilde{T}(F)),\quad \tilde{g}\in\tilde{G}(F)$$

で記述される．

Gの Langlands 双対群は$GL_2(\mathbb{C})$の直積を反対角に埋め込まれた乗法群で割った$\hat{G} = GL_2(\mathbb{C}) *_{\mathbb{C}^\times} GL_2(\mathbb{C})$であり，L 群は直積 ${}^L G = \hat{G}\times W_F$である．$G$の内視データとは，準分裂簡約代数群$H$と半単純元$s\in\hat{G}$，それに L 群の埋め込み$\xi: {}^L H \hookrightarrow {}^L G$からなる三つ組で，$\xi(\hat{H}) = Z_{\hat{G}}(s)^0$かつ，$\{[s,\xi(w)]\}_{w\in W_F}$が$Z_{\hat{G}}$値１コバウンダリであるものだった．今の場合には$G$の楕円的内視データは次の２種の同型類からなる．

1. $(G^*, 1, id_{{}^L G})$．ただしG^*は$\mathcal{B}=\mathbb{M}_2(F)$として得られる$G$の準分裂内部形式である．
2. 二次拡大E/Fに対する(H^E, s, ξ^E)．ここでH^Eは極大トーラス$(Res_{E/F}\mathbb{G}_m\times Res_{E/F}\mathbb{G}_m)^1\subset G$であり，$\xi^E$はその L 群の許容埋め込みである．

前者の場合は内部ひねり$\psi_G: G_{\bar F}\simeq G^*_{\bar F}$から正則半単純な安定共役類の集合の写像 $\psi_G: G_{rs}(F)/Ad(G(\bar F)) \to G^*_{rs}(F)/Ad(G^*(\bar F))$ がある．2 の場合は極大トーラスとしての埋め込み$\eta: H^E\hookrightarrow G$から$U_3$の場合と同様に写像

$$\mathcal{A}_{H/G}: H^E_{G-rs}(F) \to G_{rs}(F)/Ad(G(\bar F))$$

ができる．

ここでFの非自明指標$\psi: F\to\mathbb{C}^\times$を取れば，$G^*(F)$の極大冪単部分群$U_0(F)$の指標$\psi_{U_0}$が定まる．以上のもとで$G$とその内視データに対する移行因子は

$$\Delta_{H^E/G}(\gamma_H,\gamma) = \omega_{E/F}\left(-\nu(h)\prod_{i=1,2}(z_i-\sigma(z_i))\right) \times \prod_{i=1,2}\left|\frac{z_i-\sigma(z_i)}{z_i}\right|_E^{1/2}$$

となる．ここで$\gamma_H=(z_1,z_2)\in H_{G-rs}(F)$，($z_i\in E^\times$，$N_{E/F}(z_1z_2^{-1})=1$)，$\gamma = h^{-1}\eta(z_1,z_2)h$，$h\in\tilde{G}(F)$と書いている．

さて，$G(F)$上のコンパクト台を持つ局所定数関数の空間を$C_c^\infty(G(F))$で表す．正則半単純元$\gamma\in G_{rs}(F)$の中心化群を$T:=Z_G(\gamma)$として，γでの$f\in C_c^\infty(G(F))$の軌道積分

$$O_\gamma(f) := \int_{T(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)\frac{dg}{dt}$$

を導入する．このとき，$f\in C_c^\infty(G(F))$に対して$f^H\in C_c^\infty(H^E(F))$であって

$$f^H(\gamma_H) = \sum_{\{\gamma\}\in G_{rs}(F)/Ad(G(F))} \Delta_{H^E/G}(\gamma_H,\gamma)O_\gamma(f),\ (\dagger)$$

を満たすものが存在する．

$G(F)$の既約許容表現の同型類の集合を$IrrG(F)$と書く．任意の$\pi\in IrrG(F)$はある$\tilde\pi^{\mathcal{B}}\in Irr\,\tilde G(F)$の$G(F)$への制限の直和因子である．$\tilde\pi^{\mathcal B}\in Irr\,\tilde G(F)$に対して，その$G(F)$への制限の直和因子に現れる$IrrG(F)$の集合を$G(F)$の L パケットと呼び，$\Pi_{\tilde\pi^{\mathcal B}}$で表す．$\tilde\pi^{\mathcal B} = \tilde\pi_1^{\mathcal B}\otimes\tilde\pi_2^{\mathcal B}$, $(\tilde\pi_i^{\mathcal B}\in Irr\,\mathcal{B}^\times(F))$と書き，$\tilde\pi_i\in IrrGL_2(F)$を$\tilde\pi_i^{\mathcal B}$に Jacquet-Langlands 対応する表現とする．局所 Langlands 対応により$\tilde\pi_i$は局所 Langlands 群$L_F = W_F\times SU_2(\mathbb{R})$の 2 次元表現$\varphi_i: L_F\to GL_2(\mathbb{C})$に対応し，L パケット$\Pi_{\tilde\pi^{\mathcal B}}$の L パラメーターは$\varphi_1\times\varphi_2$と射影$GL_2(\mathbb C)\times GL_2(\mathbb C)\twoheadrightarrow \hat G$の合成である．$X(\tilde\pi_i) := \{\omega\in IrrF^\times \mid \omega\circ det\otimes\tilde\pi_i\simeq\tilde\pi_i\}$，$N(\tilde\pi_i) := \bigcap_{\omega\in X(\tilde\pi_i)} Ker\omega$とおき，

$$X(\varphi) := X(\tilde\pi_1)\cap X(\tilde\pi_2),$$

$$N(\varphi) := \bigcap_{\chi\in X(\varphi)} Ker\chi,$$

$$N_\varphi := N(\varphi_1)\cap N(\varphi_2)$$

と定める．

Labesse-Langlands の結果から$\tilde\pi_i^{\mathcal B}$の$\mathcal B^\times(F)_{N_\varphi} := \{g\in\mathcal B^\times(F)\mid \nu_{\mathcal B}(g)\in N_\varphi\}$への制限は既約分解 $\tilde\pi_i^{\mathcal B}|_{\mathcal B^\times(F)_{N_\varphi}} \simeq \bigoplus_{\alpha\in F^\times/N(\tilde\pi_i)}\pi^{\mathcal B}(\varphi_i,\psi^\alpha)$を持つ．そこで$G(F)_{N_\varphi} := \left(\mathcal B^\times(F)_{N_\varphi}\times\mathcal B^\times(F)_{N_\varphi}\right)\cap G(F)$の既約表現

$$\pi_\psi^{\mathcal B}(\varphi;\alpha,\beta) := \left(\pi^{\mathcal B}(\varphi_i,\psi^\alpha)\otimes\pi^{\mathcal B}(\varphi_i,\psi^{-\beta})\right)|_{G(F)_{N_\varphi}}$$

を導入する．このとき

1. 誘導表現

   $$\pi^{\mathcal B}(\varphi,\psi)^{\alpha\beta^{-1}} := ind_{G(F)_{N_\varphi}}^{G(F)}\pi_\psi^{\mathcal B}(\varphi;\alpha,\beta)$$

   は既約であり，その同型類はφ，ψ，$\alpha\beta^{-1}\in F^\times/N(\varphi)$のみで定まる．
2. L パケット$\Pi^{\mathcal B}(\varphi) := \Pi_{\tilde\pi^{\mathcal B}}$は$\pi^{\mathcal B}(\varphi,\psi)^\alpha$，$(\alpha\in F^\times/N(\varphi))$からなる．
3. 二次拡大E/Fで$N_{E/F}(E^\times)\supset N(\varphi)$を満たすものに対して，$E^\times\cong W_E^{ab}$の指標$\omega_i$であって$\varphi_i\simeq ind_{W_E}^{W_F}\omega_i$となるものがある．このとき，内視リフティングの指標等式

   $$\sum_{\alpha\in F^\times/N(\varphi)}\omega_{E/F}(\alpha)tr\pi^{\mathcal B}(\varphi,\psi)^\alpha(f) = (\omega_1\otimes\omega_2)(f^H)$$

   が成り立つ．ここで$f\in C_c^\infty(G(F))$であり，$f^H\in C_c^\infty(H^E(F))$は$(\dagger)$を満たすものである．

これらの結果と大域的な跡公式の比較から，$\mathcal B=\mathbb M_2(F)$の場合には L パケット$\Pi^{\mathcal B}(\varphi)$の元にラベル付けが定まる．ここまでの結果については論文を作成中である．

Bruhat-Tits の建物と簡約アデール群
まずはFをp進体として，連結簡約F線型代数群Gとその極大F分裂トーラスA_0を取る．中心化群$M_0 \coloneqq Z_G(A_0) \subset G$は極小レヴィ部分群である．$G$の$F$有理指標群を$X(G)$で表し，実ベクトル空間$\mathfrak{a}_G \coloneqq Hom(X(G), \mathbb{R})$を導入すれば，準同型$\nu_G : G(F) \to \mathfrak{a}_G$で$\langle \chi, \nu_G(g) \rangle = -val_F(\chi(g))$，$(\chi \in X(G)$，$g \in G(F))$となるものが定まる．$(G, A_0)$の**アパート**とは，$\mathfrak{a}_0 \coloneqq \mathfrak{a}_{M_0}$のアフィン空間$\mathfrak{A}_0$とそれへの$N_G(A_0)(F)$の作用$\nu_0$の組である条件をみたすものだった．
(G, A_0)のルート系をΣ_0と書けば，各$\alpha \in \Sigma_0$に対して冪単部分群$U_{(\alpha)} \subset G$がある．$u \neq 1, \in U_{(\alpha)}(F)$は線型部分が$\alpha$であるアフィン関数$\tilde{\alpha}(u) : \mathfrak{A}_0 \to \mathbb{R}$を定め，逆に線型部分が$\alpha$であるアフィン関数$\tilde{\alpha} : \mathfrak{A}_0 \to \mathbb{R}$は，開コンパクト部分群

$$K_{\tilde{\alpha}} \coloneqq \left\{ u \in U_{(\alpha)}(F) \mid \tilde{\alpha}(u) \geq \tilde{\alpha} \right\} \cup \{1\} \subset U_{(\alpha)}(F)$$

を定める．
このとき，アパートの点$x \in \mathfrak{A}_0$を取れば，各$\alpha \in \Sigma_0$に対して$v_{x,\alpha}(u) \coloneqq \tilde{\alpha}(u)(x)$，$(u \neq 1, \in U_{(\alpha)}(F))$はルートデータ$\left(M_0, \left(U_{(\alpha)}\right)_{\alpha \in \Sigma_0}\right)$上の付値であり，この対応により$\mathfrak{A}_0$は$\left(M_0, \left(U_{(\alpha)}\right)_{\alpha \in \Sigma_0}\right)$上の$val_F$と整合する付値たちのなす等価類と見なされる(Bruhat-Tits, Rousseau)．この事実は Bruhat-Tits の建物の存在に同値であり，これから次のように Bruhat-Tits の建物が構成できる．すなわち$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{a}_G$での像がコンパクトな部分集合$\Omega \subset \mathfrak{A}_0$に対して，開コンパクト部分群$K_\Omega \subset G(F)$が定まる．直積$G(F) \times \mathfrak{A}_0$上の同値関係$(g, x) \sim (h, y)$を，適当な$n \in N_G(M_0)(F)$に対して，$y = \nu_0(n)x$かつ$hn \in gK_x$となることと定める．商集合$\mathfrak{B}\big(G(F)\big) \coloneqq (G(F) \times \mathfrak{A}_0)/\sim$は第一成分$G(F)$への左移動作用から定まる$G(F)$作用を持つ．この$G(F)$作用付き集合$\mathfrak{B}(G(F))$が$G(F)$の **Bruhat-Tits の建物**である．なおK_Ωは作用$G(F) \curvearrowright \mathfrak{B}(G(F))$での$\Omega$の固定化群$G(F)^\Omega$に一致する．特に**スペシャル点**と呼ばれる$s \in \mathfrak{A}_0$に対する$K_s = G(F)^s$が$G(F)$の**スペシャル極大コンパクト部分群**である．このときA_0を含む放物型部分群$P \subset G$に対して**岩澤分解** $G(F) = P(F)K_s$が成り立つ．
有限次拡大E/Fに対して，$G(F)$作用と可換な単射$\mathfrak{B}\big(G(F)\big) \hookrightarrow \mathfrak{B}(G(E))$がある．特に$E/F$が不分岐拡大ならば，その像は$\mathrm{Gal}(E/F)$不変部分に一致する．さらに係数拡大$G_E$が分裂するとき，$\mathfrak{B}(G(E))$でスペシャル点であるような$\mathfrak{B}(G(F))$のスペシャル点を**超スペシャル点**という．
さて，ここからはFを代数体としてそのアデール環を$\mathbb{A}$と書く．Gを連結簡約F線型代数群とする．忠実な有理表現$\rho : G \hookrightarrow GL_n$を取り，$F$の有限個を除く非アルキメデス素点$v$において$K_v^\rho \coloneqq \rho^{-1}(GL_n(\mathcal{O}_v))$とおけば，アデール群$G(\mathbb{A})$は制限直積分解

$$G(\mathbb{A}) \simeq \bigcup_{\mathfrak{S} \supset \mathfrak{S}_\infty} \left(\prod_{v \in \mathfrak{S}} G(F_v) \times \prod_{v \notin \mathfrak{S}} K_v^\rho \right)$$

を持つ．このとき次の結果を証明できた．
極小放物型部分群$P_0 = M_0 U_0 \subset G$を取る．

1. 忠実有理表現$\rho : G \hookrightarrow GL_n$の$GL_n(F)$共役を取って，ある標準放物型部分群$P_{\boldsymbol{n}} = M_{\boldsymbol{n}} U_{\boldsymbol{n}} \subset GL_n$に対して$\rho(M_0) \subset M_{\boldsymbol{n}}$，$\rho(U_0) \subset U_{\boldsymbol{n}}$となるようにできる．
2. すべてのアルキメデス素点を含むFの素点の有限集合$\mathfrak{S}$であって，任意の$v \notin \mathfrak{S}$で次が成り立つものがある．「$M_{0,v} \coloneqq M_0 \otimes_F F_v$の極大$F_v$分裂トーラス$A_v$と$(G_v, A_v)$のアパート$\mathfrak{A}(A_v)$内の超スペシャル点$s \in \mathfrak{A}(A_v) \subset \mathfrak{B}(G(F_v))$があって，$K_v^\rho = G(F_v)^s$が成り立つ．

これも現在論文を作成中である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　0　件）

〔学会発表〕（計　3　件）
今野拓也，p進簡約群の構造，第 21 回整数論サマースクール「p進簡約群の表現論入門」，2013 年 8 月 5 日～7 日，箱根高原ホテル．

今野拓也，Siegel 領域について，岡山保型形式ミニ集会，2014 年 2 月 8 日，岡山大学．

今野拓也，アデール群の構造，熊本保型形式ミニ研究集会，2014 年 5 月 16 日～18 日，熊本大学．

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
今野　拓也（KONNO Takuya）
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：00274431

(2)研究分担者

(3)連携研究者