

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400020

研究課題名(和文) 保型L函数の特殊値

研究課題名(英文) On special values of automorphic L-functions

研究代表者

古澤 昌秋 (FURUSAWA, Masaaki)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50294525

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：森本和輝(神戸大学)との共同研究によって、5次元以上の奇数次の特殊直交群上の尖点表現について、special Bessel periodが非消滅ならば、対応するL函数の函数等式の中心における特殊値が非消滅である、というGross-Prasad予想を証明した。
同じく、森本和輝との共同研究で、anisotropicな特殊直交群上の保型表現とGL(2)の正則尖点形式に対応する尖点表現のテンソル積L函数について、幾つかの臨界点における特殊値の代数性を証明した。

研究成果の概要(英文)：In a joint work with Kazuki Morimoto of Kobe University, we proved one direction of the Gross-Prasad conjecture in the case of special Bessel periods for $SO(2n+1)$. Namely we proved that the non-vanishing of the special Bessel period for $SO(2n+1)$ implies the non-vanishing of the central value of the corresponding L-function. We also proved the converse in some cases. In another joint work with Kazuki Morimoto, we proved the algebraicity of some critical values of the tensor product L-functions for $SO(V)$ times $GL(2)$ where V is anisotropic. Our result involves some unbalanced cases of the Rankin triple L-function for $GL(2)$.

研究分野：保型L函数

キーワード：保型L函数 L函数の特異値 テータ対応

1. 研究開始当初の背景

数論的に意味のある L 関数について、その特殊値を考察することは、現代の数論における中心的研究課題の1つである。特殊値の代数性を示すことは、更に深い数論的性質の解明への重要なきっかけを与える。また、Birch & Swinnerton-Dyer 予想に見られるように、函数等式の中心における特殊値は特別な意味を持つと考えられる。

本研究は、

課題 A: IV 型領域の正則 Eisenstein 級数の Fourier 係数の代数性を用いて、Eisenstein 級数の Bessel period に現れる L 関数の特殊値の代数性を示す。

課題 B: 次数 2 の正則 Siegel 尖点形式の Bessel period に関する Boecherer の予想に相対跡公式を用いてアプローチすること。以上二つの課題を動機として開始された。

2. 研究の目的

課題 A において現れる L 関数は、anisotropic な特殊直交群と $GL(2)$ のテンソル積 L 関数である。この特別な場合として、 $GL(2)$ の Rankin triple L 関数で unbalanced な場合が含まれる。これについては、函数等式の中心での特殊値については Harris-Kudla、市野等の結果があるが、それ以外の臨界点での特殊値については、市野-池田が得た場合を除いては、これまで得られた結果を知らない。anisotropic な特殊直交群上の保型表現はある意味で自明に代数的であるが、これまであまり研究がなされていない。この点からも、上記の L 関数の特殊値の研究は興味深いと思われる。

課題 B における Boecherer 予想に現れるのは、次数 2 の Siegel 尖点形式のスピンル L 関数とそれを 2 次指標で捻った L 関数の積の函数等式の中心における特殊値である。また、Bessel period は、古典的な Fourier 係数の虚 2 次体のイデアル類群上の和、として表される。したがって、古くから親しまれている Fourier 係数に L 関数論的に意味のある数論的に重要な不変量が関係しているという、驚異的な事実を示していることになる。

以上を解明するのが、本研究の目的である。

3. 研究の方法

課題 A については、Eisenstein 級数の Fourier 係数をとった後に、anisotropic な特殊直交群上の保型形式を重みとした(本質的には有限)和を取ることになる。これの代数性を示さなければならない。これを実行するに当たっては、automorphic vector bundle, canonical model の理論等を細心に注意深く適用しなければならない。また、無限素点での積分に関しては、explicit な計算を実行しなければならない。そのためには、うまい変

数変換を取ることが重要になる。これらを森本和輝(神戸大学)との共同研究として行った。森本は単独で、Deligne 周期の計算を行い、得られた特殊値の代数性の結果が、Deligne 予想と consistent であることを示すのにも成功した。

課題 B については、1990 年代の後半以来、長年に渡って、Joseph A. Shalika, Kimball Martin との共同研究として、相対跡公式によるアプローチでの研究を行ってきた。我々は、Boecherer の予想及びその自然な一般化にアプローチする 3 つの相対跡公式を定式化し、それらに関する基本補題 (Fundamental Lemma) を Hecke 環の単位元に関して証明した。さらに、第一と第三の相対跡公式については、Macdonald 多項式の理論を用いて、基本補題の Hecke 環全体への拡張を証明し、Memoirs of the American Mathematical Society より 2013 年に公刊した。本研究開始時は、この路線を継続し、第一と第三の相対跡公式について、局所軌道積分の smooth matching を証明することを目標としていた。その、雛形として、まず $GL(2)$ の類似の問題を考察していた。非アルキメデス局所体上の smooth matching は、困難な問題とは思われなかったが、アルキメデス局所体上の smooth matching は思っていたよりも手強いように思われた。また、 $GL(2)$ でも自明でない問題を $GSp(2)$ に拡張することはなかなか困難な問題に思われた。また、smooth matching が証明できたとしても、その後には、相対跡公式の spectral な問題を克服しなければならず、これはさらに困難な問題と思われた。そのような事情で、相対跡公式による課題 B の研究は、停滞を余儀なくされていた。

一方、1990 年代後半に相対跡公式によるアプローチに専念する以前には、テータ対応による Boecherer 予想へのアプローチを考えていたことがあった。その時点では、multiplicity や irreducibility の問題など、テータ対応の基本的な理論でまだ確立されていないものが沢山あり、それを主な理由として、このアプローチを諦めていた。しかし、以来 20 年近くの時間がすぎ、Gan-Takeda による Howe 予想の完全解決、山名による doubling method の完成等、テータ理論の基礎理論は確立したように思えた。そこで、2015 年の秋から、最新のテータ対応の理論に精通している森本和輝との共同研究として、テータ対応による課題 B の再考察を開始した。方法としては、 $PGSp(2)$ が accidental isomorphism により、split な $S(5)$ と同型であることを使って、2 次の metaplectic group との間のテータ対応を考察し、その両方向について、Whittaker period の引き戻しを計算することによって行われた。

4. 研究成果

課題 A については、まず設定の simple な場

合について証明し, American Journal of Mathematics から 2014 年に公刊した .そして, 次に一般の場合について考察し, その論文も American Journal of Mathematics から 2016 年に公刊した . 第二の論文においては, 考察する臨界点を左にずらすに当たって, 微分作用素を用いるのではなく, Eisenstein 級数の K-type を変えることによって, 行うことに成功した . これを体系的に行った論文はこれまで無かったのではないと思われる . 課題 B については, より一般に, $SO(2n+1)$ と n 次の metaplectic group の間のテータ対応を考えることによって, $SO(2n+1) \times SO(2)$ の special Bessel period に関する Gross-Prasad 予想の 1 つの方向について証明することができた . すなわち, special Bessel period が zero でないならば, 対応する L 関数の特殊値が zero でないことを示すのに成功した . また, Arthur の予想が quasi-split でない群にまで拡張されたという仮定を置くと, 逆方向についても満足の行く結果が得られることを示すことができた . これらの結果は, オンライン版は既に, Mathematische Annalen より公刊されている . 予想していたよりも, はるかに迅速に研究は進化した .

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 9 件)

(査読有) M. Furusawa and K. Morimoto, On special Bessel periods and the Gross-Prasad conjecture for $SO(2n+1) \times SO(2)$, Mathematische Annalen 368 (2017), no. 1-2, 561-586.
DOI: 10.1007/s00208-016-1440-z

(査読有) M. Furusawa and K. Morimoto, On special values of certain L-functions II, American Journal of Mathematics 138 (2016), no. 4, 1117-1166.
DOI: 10.1353/ajm.2016.0037

(査読有) M. Furusawa and K. Martin, Local root numbers, Bessel models, and a conjecture of Guo and Jacquet, Journal of Number Theory 146 (2015), 150-170.
DOI: 10.1016/j.jnt.2013.07.001

(査読無) M. Furusawa, On special values of certain L-functions

(ある L 関数の特殊値について : 森本和輝との共同研究), 数理解析研究所講究録 1934, 「保型形式および関連するゼータ関数の研究」所収, pp.170-172, 2014.

(査読有) M. Furusawa and K. Morimoto, On special values of certain L-functions, American Journal of Mathematics 136 (2014), no. 5, 1385-1407.
DOI: 10/1353/ajm.2014.0032

(査読有) M. Furusawa and K. Martin, On central critical values of the degree four L-functions for $GSp(4)$: a simple trace formula, Mathematische Zeitschrift 277 (2014), no. 1-2, 149-180.
DOI: 10.1007/s00209-013-1248-4

(査読無) M. Furusawa, On a certain simple relative trace formula for $GSp(4)$ (joint work with Kimball Martin), 数理解析研究所講究録 1871, 「保型表現とその周辺」所収, pp. 207-213, 2013.

(査読有) M. Furusawa, K. Martin and J. A. Shalika, On central critical values of the degree four L-functions for $GSp(4)$: the fundamental lemma III, Memoirs of the American Mathematical Society 225 (2013), no.1057, x+134pp.
DOI: 10.1090/S0065-9266-2013-00675-2

(査読有) M. Furusawa and K. Morimoto,
Shalika periods on $GU(2,2)$,
Proceedings of the American
Mathematical Society 141 (2013), no.
12, 4125-4137.
DOI:
10.1090/S0002-9939-2013-11690-4

[学会発表](計4件)

M. Furusawa, On special values of certain L-functions II (joint work with Kazuki Morimoto), 2014年1月24日, RIMS 研究集会「保型形式及び関連するゼータ関数の研究」, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

(招待講演) M. Furusawa, Bessel models and a conjecture of Guo and Jacquet, Workshop on Representation Theory, 2014年7月21日, National University of Singapore (Singapore, Singapore)

(招待講演) 古澤昌秋, Bessel model と Guo-Jacquet の予想について, 談話会, 2014年12月18日, 九州大学数理学府(福岡県福岡市)

(招待講演) M. Furusawa, On special Bessel periods and the Gross-Prasad conjecture for $SO(2n+1) \times SO(2)$, Relative Trace Formula, Periods, L-Functions and Harmonic Analysis, 2016年5月23日, CIRM (Marseille, Luminy, France)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

古澤 昌秋 (FURUSAWA, Masaaki)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 50294525