**様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）**

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

**機関番号：** ３４３１６
**研究種目：** 基盤研究(C)（一般）
**研究期間：** 2013～2015
**課題番号：** ２５４０００３０
**研究課題名（和文）** 多重旗多様体の軌道分解

**研究課題名（英文）** Orbit decomposition of multiple flag varieties

**研究代表者**
松木　敏彦（Matsuki, Toshihiko）

龍谷大学・文学部・教授

研究者番号：２０１５７２８３

**交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）**　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：　標数が２でない任意の無限体上の split 奇数次直交群 G の多重旗多様体（旗多様体のいくつかの直積）について、有限型（G の対角的作用による軌道が有限個）になるための必要十分条件を与えた。一般線形群と（代数的閉体上の）symplectic 群の場合には Magyar-Weyman-Zelevinsky によって必要十分条件が与えられている。偶数次の場合についても同じようにして解決できると思われる。

研究成果の概要（英文）：For a multiple flag variety (a direct product of flag varieties) of split orthogonal groups of odd degree over an infinite field of characteristic not two, we gave the necessary and sufficient condition for the finiteness of G-orbits under the diagonal action. For general linear groups and symplectic groups (over an algebraically closed fields), the conditions were given by Magyar-Weyman-Zelevinsky. It seems we can also solve the even-degree case by the same method.

研究分野：リー群論、代数群論

キーワード：古典群　代数群

１．研究開始当初の背景
(1) 一般線形群と symplectic 群の場合
　$G=GL_n(\mathbf{F})$を体 $\mathbf{F}$ 上の一般線形群とし、$G/P_1$, …, $G/P_k$ を G の旗多様体とするとき、G は多重旗多様体 $G/P_1\times\cdots\times G/P_k$ に対角的に自然に作用する。Magyar-Weyman-Zelevinsky [1] は 1999 年にこの作用が有限型（軌道の数が有限個）であるための $G/P_1$, …, $G/P_k$の条件を求め、軌道の parametrization を与えた。特に、有限型であるためには k が 3 以下であることが必要であることも示された。k=2 の場合は Bruhat 分解に他ならないので k=3 の場合が問題であった。彼らはこの問題を quiver の表現論に帰着させて解決した。なお、彼らは $\mathbf{F}$ を代数的閉体と仮定している。
　引き続く論文 [2] において、彼らは symplectic 群に対して一般線形群に埋め込む方法を用いて同じことを行なった。この場合、$\mathbf{F}$ が代数的閉体という仮定は本質的である。

(2) $P_3$ が Borel 部分群 B の場合
　Brion-Vinberg の定理により、$\mathbf{F}$ が標数 0 の代数的閉体のとき、$G/P_1\times G/P_2$ が開 B 軌道を持てば軌道の数は有限である。Littelmann [3] および Stembridge [4] は表現のテンソル積の分解の問題に帰着させることにより、一般の単純代数群 G について、$P_3$ が Borel 部分群の場合に３重旗多様体が有限型になるための条件を決定している([3] は $P_1$, $P_2$ が極大放物型部分群の場合)。この方法では軌道の数が「有限」であることはわかっても軌道の parametrization はできない。

(3) 奇数次 split 特殊直交群の３重旗多様体の典型例
　標数が 2 でない任意の体 $\mathbf{F}$ に対し、$\mathbf{F}^{2n+1}$ 上の対称２次形式 ( , ) を $(e_i,e_j)=\delta_{i,2n+2-j}$ で定義する。ただし、$e_1,\cdots,e_{2n+1}$ は $\mathbf{F}^{2n+1}$ の標準基底とする。この２次形式に関する特殊直交群 $G=SO_{2n+1}(\mathbf{F})$ は Chevalley 型代数群であって扱いやすい。$e_1,\cdots,e_n$ で張られる $\mathbf{F}^{2n+1}$ の部分空間を固定する G の部分群 P は G の極大放物型部分群である。研究代表者は論文 [5] において３重旗多様体 $G/P\times G/P\times G/P$ および $G/P\times G/P\times G/B$ の軌道分解を明示的に与えた。軌道の数の式と$\mathbf{F}$が有限体の場合に各軌道に含まれる元の数の式も与えた。

(4) その他の研究
　複素半単純リー群 G の旗多様体 G/P と G の対称部分群 K の旗多様体 K/Q の直積の K-軌道分解が西山、落合らによって研究されている。また、(2) に関連する研究として、田中雄一郎は旗多様体の２つの直積が可視的（小林俊行の提唱）になるものの分類が Stembridge [4] の分類と一致することを示した。論文 [6] では [5] の軌道分解が用いられている。

[1] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, Multiple flag varieties of finite type, Adv. Math. **141**(1999), 97-118

[2] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, Symplectic multiple flag varieties of finite type, J. of Algebra **230**(2000), 245-265

[3] P. Littelmann, On spherical double cones, J. of Algebra **166**(1992), 142-157

[4] J. R. Stembridge, Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters, Representation Theory. **7**(2003), 404-439

[5] T. Matsuki, An example of orthogonal triple flag variety of finite type, J. of Algebra **375**(2013), 148-187

[6] A. Henderson and P. Trapa, The exotic Robinson-Schensted correspondence, J. of Algebra **370**(2012), 32-45

２．研究の目的
(1) 標数が２でない体$\mathbf{F}$上の奇数次 split 特殊直交群 $SO_{2n+1}(\mathbf{F})$に関する多重旗多様体について、軌道が有限個になるための必要十分条件を求め、軌道の parametrization を与える。
(2) 偶数次 split 特殊直交群について(1)と同じことを行なう。
(3) Chevalley 型の例外型単純群について(1)と同じことを行なう。
(4) 軌道の最小余次元が１の場合の分類を行なう。
(5) 表現論や微分方程式論との関連を調べる。
　(4) の最も基本的な例はリーマン球面 $P^1(\mathbf{C})$の４つの直積への $GL_2(\mathbf{C})$の作用である（これは $D_4$ 型の拡大 Dynkin 図形の形の quiver の表現である）。これには Gauss の超幾何微分方程式が関係している。さらに、文献 [1] における分類では $E_6$, $E_7$, $E_8$ 型の拡大 Dynkin 図形に対する３重旗多様体が重要であった。これらも (4) の例である。

本研究の特色：
　直交群は symplectic 群より次元が小さい

ために、一般線形群に埋め込んで quiver の表現論ですべてを解決することは困難である。ところが、逆に論文 [5] の split 直交群の多重旗多様体の軌道分解は体 $\mathbf{F}$ に依存しない。(注意：symplectic 群の場合は体の取り方に本質的に依存する。）従って、初等的線形代数によって研究できる。

例として最も簡単な $SO_3(\mathbf{F})$ の場合、$G/P=G/B=P^1(\mathbf{F})$ であるので、$GL_2(\mathbf{F})$ の場合と同じで、$P^1(\mathbf{F})\times P^1(\mathbf{F})\times P^1(\mathbf{F})$ 上の G-軌道は
$\{z_1=z_2=z_3\}$, $\{z_1=z_2\neq z_3\}$, $\{z_2=z_3\neq z_1\}$, $\{z_3=z_1\neq z_2\}$, $\{z_1\neq z_2\neq z_3\neq z_1\}$
の５個であり、$\mathbf{F}$ が q 個の元からなる有限体の場合、それぞれの軌道に含まれる元の数は $q+1$, $q(q+1)$, $q(q+1)$, $q(q+1)$, $(q-1)q(q+1)$（合計：$(q+1)^3=|P^1(\mathbf{F})|^3$）である。

３．研究の方法

① 標数が２でない体上の奇数次 split 特殊直交群の多重旗多様体について無限型の多重旗多様体が埋め込まれている場合を除外することにより、有限型になるための必要十分条件を求める。

② 有限型のときの軌道分解を記述する。

③ 軌道の最小余次元が１の場合の分類を行な

④ 表現の分岐則および微分方程式論との関連を調べる。

以上の研究計画を行なうため、次のことが必要である。

(1) 表現論・微分方程式論との関連については東京大学の小林俊行・大島利雄との研究連絡を行なう。

(2) リー群、代数群、表現論関係の研究集会に出席して資料収集を行なう。

(3) リー群、代数群、表現論関係の書籍を充実させる。

４．研究成果

(1) 奇数次 split 直交群の k 重旗多様体が有限型ならば $k\leqq 3$ であることを次のようにして示した。

$\mathbf{F}^{2n+1}$ を３次元空間と $2n-2$ 次元空間の直和と考え、３次元空間の中に４つの１次元部分空間を配置すればその３次元直交群による軌道は明らかに無限個である。これと $2n-2$ 次元空間の中の singular な４つの部分空間配置との直積を取れば $2n+1$ 次直交群 G の軌道が無限個存在することがわかる。

この方法は Magyar-Weyman-Zelevinsky による抽象的な「直和分解」による方法よりも具体的で適用範囲も広いと思われる。

(2) 奇数次 split 直交群の３重旗多様体が有限型になるための必要十分条件を与えた。

有限型になるのは次の４つの型のときである。

(I) $G/P\times G/P\times G/P_3$（上記[5]の論文で扱った型）

(II) $G/P_1\times G/P_2\times G/P_3$ で $G/P_1$ の旗が１次元、$G/P_2$ が極小のとき

(III) ３つの旗多様体が極小でそのうちの１つが G/P のとき

(IV) $G/P\times G/P_1\times G/P_2$ で $G/P_1$ は極小、$G/P_2$ は２ステップのとき

まず、有限型３多重旗多様体がこれらに限られることを次のようにして証明した。

５次、６次、７次の直交群の無限型３重旗多様体を構成し、それらと singular な３重旗との直積を用いて軌道が無限個になる場合を除外した。これによって、有限型になり得るのは上記の４つの型の場合だけであることが示された。

次にこれらの４つの型がすべて有限型であることを証明した。

(I), (II) については $G/P_3$ は無条件であるので Littelmann, Stembridge によって分類されたものと一致する。ただし、(II) については、$P\neq P_2$ のとき体の条件 $|\mathbf{F}^\times/(\mathbf{F}^\times)^2|<\infty$ が必要である。例えば $\mathbf{F}=\mathbf{Q}$（有理数体）のときは $|\mathbf{Q}^\times/(\mathbf{Q}^\times)^2|=\infty$ であることに注意する。

(I) 型については論文[5]において具体的に軌道分解が記述されている。(II) 型についても具体的に軌道分解を記述した。

(III) 型の分類は実質的に Magyar-Weyman-Zelevinsky によるものと同じで、１５種類の既約な対象への直和分解によって記述できる。

自明なものから順に直和成分を取り出していくという原始的な方法で、最終的に (I) 型の軌道分解に帰着することを示した。Magyar-Weyman-Zelevinsky の方法のように最初から（直既約分解の一般論を用いて）一般的に直和分解を構成したわけではない。

(IV) 型の有限性の証明は (III)型の isotropy 群を用いて行なった。本質的に掃き出し法であるので任意の体上で議論できる。最終的に証明は (I) 型の軌道分解の結果に帰着する。従って、「既約な対象への直和分解」の方法は適用していない。

３重旗多様体の次元と直交群の次元が一致する場合、群の忠実な埋め込み（コンパクト化）が得られるので興味深い。(I) 型で $P_3=B$ の場合が一般的であるが、(IV) 型についてもすべて分類し、13 通りの場合があることを示した。最大１５次の直交群にこのようなものが存在する。((II) 型、(III) 型には自明なものしか存在しない。)

偶数次 split 特殊直交群についても、同様にして有限型になるための必要条件は決定できると思われる。この条件が十分条件であることも奇数次の (IV) 型の場合と同様にして示せると思われる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）
① T. Matsuki, Orthogonal multiple flag varieties of finite type I: Odd degree case, J. of Algebra **425**(2015), 450-523, 査読有り
DOI:10.1016/j.jalgebra.2014.11.016

〔学会発表〕（計　7　件）
① T. Matsuki, Orthogonal multiple flag varieties, Sphericity 2016, 2016/2/25, Kloster Reute, Germany
② 松木敏彦、奇数次直交群の３重旗多様体の軌道分解、日本数学会秋季総合分科会、2014/9/28、広島大学
③ 松木敏彦、奇数次直交群の有限型多重旗多様体の分類、日本数学会秋季総合分科会、2014/9/28、広島大学
④ 松木敏彦、奇数次直交群の有限型多重旗多様体、数理解析研究所研究集会、2014/6/26、京都大学数理解析研究所
⑤ T. Matsuki, Group actions on multiple flag varieties（招待講演）, Spring school for representation theory and geometry of reductive groups, 2014/3/22 ～ 3/29, Kloster Heiligkreuztal, Germany
⑥ 松木敏彦、直交群の多重旗多様体の有限型軌道分解、日本数学会秋季総合分科会特別講演（招待講演）、2013/9/26、愛媛大学
⑦ T. Matsuki, Triple flag varieties for orthogonal groups(招待講演), JSPS-NWO 二国間交流日蘭セミナー Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces, 2013/8/29, 名古屋大学

〔その他〕
ホームページ等 Home page of Toshihiko MATSUKI (松木敏彦)
http://www.ab.auone-net.jp/~matsuki/

６．研究組織
(1)研究代表者
　松木　敏彦（Matsuki Toshihiko）
　龍谷大学・文学部・教授
　研究者番号：20157283

(2)研究分担者
　　　　　　（　　　）

　研究者番号：

(3)連携研究者
　　　　　　（　　　）

　研究者番号：