

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 1 日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400031

研究課題名(和文) 多変数保型形式の整数論的研究

研究課題名(英文) Study on arithmetic theory of automorphic forms of several variables

研究代表者

長岡 昇勇 (NAGAOKA, Shoyu)

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：20164402

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：研究目標はJ.-P.セールが一変数モジュラー形式の場合に研究した $p$ 進モジュラー形式を多変数モジュラー形式、たとえばジーゲルモジュラー形式やエルミートモジュラー形式の場合に拡張しようとするものであった。詳細にのべると、セールの理論で重要な役割を果たしたテータ作用素の概念を、これらのモジュラー形式の場合に拡張し、その性質を研究した。この期間での特筆すべき成果としては、素数 $p$ についてテータ作用素の $\text{mod } p$ 核の概念を定義し、今まで知られていた井草のカスプ形式がこの性質をもつことを発見したことが挙げられる。

研究成果の概要(英文)：The aim of this study is to extend Serre's theory of  $\text{mod } p$  or  $p$ -adic modular forms to the case of modular forms of several variables. In the previous study we determined the structure of the algebra of  $\text{mod } p$  modular forms in the case of Siegel modular forms which is a typical example of such modular forms. Moreover we determined the structure of such algebra in the case of Hermitian modular forms whose based field is the Gaussian field. Based on these results, we extended the notion of the theta operator and got some results on  $\text{mod } p$  kernel of such operator. This is defined as the image of the theta operator is congruent zero modulo some prime  $p$ . We could get a lot of such examples, for example, Igusa's weight 35 cusp form and theta series for the Leech lattice are  $\text{mod } 23$  kernel of the theta operator. We also clarified the relation between the weight and the congruence prime.

研究分野：代数学

キーワード：保型形式

1. 研究開始当初の背景

- (1) 研究の目標は J.-P.セールが開始したモジュラー形式の  $p$  進理論を多変数の場合に拡張していこうというものであった。研究開始時点では、多変数モジュラー形式の一種であるヒルベルトモジュラー形式の場合に幾何学的取り扱いによる拡張(主に N.カッツによる)があったが、その他の多変数モジュラー形式、例えばジークルモジュラー形式、エルミートモジュラー形式への拡張は十分にはなされていなかった。
- (2) 正標数の体上のモジュラー形式の理論は H.P.F.スイナートン=ダイアーが一変数の場合に確立したが、多変数の場合は手つかずであった。

2. 研究の目的

- (1) 上記研究の背景でも述べたように、正標数の体や  $p$  進体上のモジュラー形式の理論は一変数の場合は十分に研究され、 $p$  進ゼータ関数の構成等に役立った。しかしながら多変数のモジュラー形式の場合の  $p$  進理論は十分には研究されたとはいえない。この理論を多変数モジュラー形式の典型的例であるジークルモジュラー形式やエルミートモジュラー形式の場合に拡張し、その性質を明らかにすることを目的とした。
- (2) 上記に述べたスイナートン=ダイアーの  $\text{mod } p$  のモジュラー形式の algebra の構造を多変数のモジュラー形式の場合に決定することを目標とした。

3. 研究の方法

多変数のモジュラー形式の典型的な例であるジークルモジュラー形式については専門家であるドイツ・マンハイム大学 S.ベッヘラー教授と緊密な研究連絡をとり研究を行った。またエルミートモジュラー形式については、ドイツ・アーヘン工科大学の A.クリーク教授とその弟子達が盛んに研究を行っており、ドイツを訪問し彼らと緊密に研究連絡を行った。

4. 研究成果

この研究期間において  $\text{mod } p$  モジュラー形式の理論、 $p$  進モジュラー形式の理論の多変数化を試み、いくつかの事実を発見した。その詳細について以下に述べる。

(1)  $p$  進モジュラー形式の応用

(論文リスト(1))

それまでの研究において、アイゼンシュタイン級数と呼ばれているモジュラー形式については、その  $p$  進化が報告者により研究され、ある場合にはジーナステータ級数に一致するという著しい結果を得ている。それに続くこの研究では、アイゼンシュタイン級数と対照的なカスプ形式の場合に、そのような理論を打

ち立てた。すなわち、カスプ形式の列で  $p$  進的極限がいわゆるガンマゼロ型のカスプ形式になるものを構成することが可能となった。例としてそれまで「吉田のカスプ形式」として知られていたレベルが 11、重さが 2 のジークルカスプ形式をそのフーリエ係数が計算できる形で具体的に与えることができた。

(2) 四元数モジュラー群の場合の  $p$  進アイゼンシュタイン級数の構成論文

(論文リスト(2))

報告者は多変数モジュラー形式の典型的な例であるジークルモジュラー形式、エルミートモジュラー形式の場合に  $p$  進アイゼンシュタイン級数を定義し、その性質を調べた。 $p$  進アイゼンシュタイン級数は通常アイゼンシュタイン級数の  $p$  進極限として定義されるが、ある特殊な場合レベル  $p$  の通常モジュラー形式になる現象が確認されている(これも報告者の研究成果である)。標記の四元数モジュラー群の場合に同様に通常アイゼンシュタイン級数の  $p$  進極限をとると、特別な場合超越的なフーリエ係数をもつものが構成できた。これまでに知られている  $p$  進アイゼンシュタイン級数は全て代数的(有理的)なものばかりであり、新しい現象の発見といえる。

(3) ラマヌジャン型合同について

(論文リスト(3))

ラマヌジャンは有名なラマヌジャンのタウ関数とアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の間に成立する合同式を証明した。研究の始まりは、この合同式を多変数、とくにジークル、エルミートモジュラー形式の場合に拡張しようというものであった。この研究のなかでエルミートのカスプ形式である重さのところには非自明なもの存在するという成果も得られた。

(4) ベクトル値ジークルモジュラー形式の  $p$  進化

(論文リスト(4))

この共同研究を行ったドイツ・マンハイム大学のベッヘラー教授は、ジークルモジュラー形式の世界的権威であるが、報告者の  $p$  進理論に興味をもち、ベクトル値ジークルモジュラー形式の場合も含めて  $p$  進化理論を進めることを提唱された。これはこれまで研究されてきたスカラー値ジークルモジュラー形式と比較し、線形群の表現が関連するため、 $p$  進化の概念そのものの定義が非常に難しい。報告者はベッヘラー教授とその端緒を切り開いた。ベクトル値ジークルモジュラー形式の加群構造は様々な研究者により研究されてきており、その結果と合わせて新たな  $\text{mod } p$  理論も期待されている。

#### (5) テータ作用素の研究

(論文リスト(5),(6),(7))

この研究において、テータ作用素の mod  $p$  核の理論が発展した。テータ作用素の理論は一変数の場合は、ラマヌジャン作用素として研究され、セールの  $p$  進モジュラー形式の理論においても重要な役割を果たした。この作用素の  $p$  進化の試みは上記ベッヘラー教授との共同研究にも現れ、その重要性は以前より指摘されていた。今回の研究の発端は、いわゆる井草のカスプ形式とよばれている 2 次のジークルモジュラー形式のフーリエ係数の数値計算の際に発見されたある事実によるものである。一般にジークルモジュラー形式のフーリエ係数はある行列により番号付けられているが、井草の重さ 35 のカスプ形式について、そのフーリエ係数を数値計算した際、次の現象を発見した。それは行列式が素数 23 で割り切れていない行列に対応するフーリエ係数は、その係数そのものが 23 で割り切れているという奇妙な現象である。この現象は、現在の言葉では井草のカスプ形式はテータ作用素の mod 23 核に含まれると解釈できる。この現象は最初単なる現象であって、この研究期間中に証明が与えられた。その手法は「スツルム境界」の概念を用いるもので、簡単に述べるとあるところ(境界)までのフーリエ係数が  $p$  で割り切れれば、全てのフーリエ係数が  $p$  で割り切れるということを保証するものである。この強力な結果と実際の数値計算を組み合わせることで証明を完成させた。この結果において様々な研究課題が残された。それはどのような重さのところ、どのような素数の合同が現れるかという問題である。すなわち井草のカスプ形式を例にとって述べれば、どうして重さ 35 のところに素数 23 の合同が現れるかと言う問題である。この問題に対して、アイゼンシュタイン級数の場合に解答を与えた(論文リスト 5)。すなわち一般の次数でテータ作用素の mod  $p$  核に含まれるアイゼンシュタイン級数の条件 ( $p$  と  $n$  が満たすべき条件)を確定した。

この研究の中で、テータ作用素の mod  $p$  核に含まれるモジュラー形式が続々と発見された。井草の重さ 35 のカスプ形式はテータ作用素の mod 23 核であることを上に述べたが、そのほかにも

重さ 12 のジークルアイゼンシュタイン級数

ラマヌジャンのデルタからくる重さ 12 のクリンゲン型アイゼンシュタイン級数

リーチ格子に対するテータ級数(重さが 12 のジークルモジュラー形式になる)

等が全てテータ作用素の mod 23 核に含まれるモジュラー形式の例を与えている。この重さ 12 と合同素数 23 を加えると井草のカスプ形式の重さ 35 になることに着目し、別の対、すなわち重さ 47 のカスプ形式で合同素数 31 なる例も発見している。上記リーチ格子に対するテータ級数に関する結果は、その後詳細に調べられた。知られているように、ランクが 24 の正定値偶ユニモジュラー格子はニーマイヤーによって完全に分類されており、24 個のクラスに分かれ、リーチ格子はその一つとなっている。引き続きの研究において、この 24 個のクラスの代表系それぞれについて対応するテータ級数を計算し、どの格子がリーチ格子と同様の性質を持つかを調べた。結論はこれら 24 個の代表系のうち 4 個のみが同様の性質をもつ、すなわちテータ作用素の mod 23 核に入ることが確認された。この研究は進展中であり、エルミートテータ級数と呼ばれるエルミート格子に対応するテータ級数があり、これについて同様の現象が発見されている。ランクが 12 の正定値偶ユニモジュラーエルミート格子の分類は、北詰-宗政氏の研究により分類されており、28 個の類に分かれることが証明されている。この中にリーチ格子と同様の性質をもつもの、(ここでは長さ 1 のものが存在しないと言う意味)いわばエルミートリーチ格子と呼ぶべき格子に対応するテータ級数(エルミートモジュラー形式になる)のフーリエ係数の計算に成功している。その結果このテータ級数は、テータ作用素の mod 11 核に入ることが確認された。この分野は 2 次形式論の専門家によるアプローチがあり、上に述べたジークルモジュラー形式の場合は、自己同型群の位数(リーチ格子の場合は自己同型群の位数を割る最大素数が 23)による結果の解釈がなされているが、このエルミート格子の例は、この解釈の枠内に入らない。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

1. 論文名: Note on theta series for Niemeier lattices.

著者名: Shoyu Nagaoka, Sho Takemori,

掲載雑誌名: Ramanujan Journal of Mathematics, 掲載決定 (Online 公開済)

2015

DOI:10.1007/s11139-015-9720-x

2. 論文名 : Note on Igusa's cusp form of weight 35.  
著者名 : Toshiyuki Kikuta, Shovu Nagaoka, Hirotaka Kodama,  
掲載雑誌名 : Rocky Mountain Journal of Mathematics, 45 巻、査読有 963-972(2015)  
DOI:10.1216/RMJ-2015-45-3-963
3. 論文名 : On the mod  $p$  kernel of the theta operator.  
著者名 : Shovu Nagaoka,  
掲載雑誌名 : Proceedings of the American Mathematical Society, 143 巻、査読有 4237-4244(2015)
4. 論文名 : On  $p$ -adic properties of Siegel modular forms.  
著者名 : Siegfried Boecherer and Shovu Nagaoka,  
掲載雑誌名 : Automorphic Forms, Springer, Proceedings in Mathematics and Statistics, 査読有、47-66(2014)  
DOI:10.1007/978-3-319-11352-4\_4
5. 論文名 : Ramanujan type congruences for modular forms of several variables.  
著者名 : Toshiyuki Kikuta, Shovu Nagaoka  
掲載雑誌名 : Ramanujan Journal 32 巻 , 査読有 143-157(2013)  
DOI:10.1007/s11139-012-9423-5
6. 論文名 : On  $p$ -adic quaternionic Eisenstein series.  
著者名 : Toshiyuki Kikuta, Shovu Nagaoka  
掲載雑誌名 : Abhandlungen Math. Seminar Univ. Hamburg, 83 巻、査読有 147-157(2013)  
DOI:10.1007/s12188-013-0084-0
7. 論文名 : On level  $p$  Siegel cusp forms of degree two.  
著者名 : Hirotaka Kodama, Shovu Nagaoka, Yoshiyuki Nakamura,  
掲載雑誌名 : International Journal of Mathematics and Mathematical Science 2012, 査読有, 1-9(2012)  
DOI:10.1155/2012/149154

〔学会発表〕(計 3 件)

1. 招待講演 : 第 60 回代数学シンポジウム、  
講演題目 : 「Siegel modular 形式の合同」  
2015 年 9 月 2 日  
静岡市、静岡大学

2. 発表者 : 長岡昇勇  
招待講演 : ドイツ・アーヘン工科大学数学講演会  
講演題目 : 「Survey on the kernel of the theta operator」  
2014 年 12 月 14 日  
ドイツ、アーヘン市アーヘン工科大

3. 発表者 : 長岡昇勇  
招待講演 : ドイツ・マンハイム大学数学講演会  
講演題目「On mod  $p$  properties of vector valued Siegel modular forms」  
2014 年 12 月 1 日

〔図書〕(計 1 件)

1. 翻訳者 : 長岡昇勇  
翻訳書 : 「ジューゲルモジュラー関数論」  
E.フライターク著  
共立出版 (2014) , 408 頁  
ISBN 978-4-320-11094-6

〔産業財産権〕  
出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

長岡 昇勇 ( Shoyu Nagaoka )

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：20164402

(2) 研究分担者

なし

研究者番号：

(3) 連携研究者

なし

研究者番号：