

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 9 日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400032

研究課題名(和文)ゼータ関数の関数等式とオイラー積

研究課題名(英文)Functional equations for zeta-functions and Euler product

研究代表者

金光 滋 (KANEMITSU, Shigeru)

近畿大学・工学部・教授

研究者番号：60117091

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：過去15年間にわたる科学研究費補助金のもとで、研究を重ねてまいりました成果を「ゼータ関数大全 モジュラーリレーションシュープリマシー」にまとめあげ出版できたことは最大の成果と考えます。同書で、関数等式 ゼータ対称性に同値であるいはそれからの帰結である知られているすべての等式を同定することができました。また、オイラー積をもつものともたないものの間の閾値を特定することもできました。第2巻に取り掛かり、オイラー積をもつ場合のこれまでの結果を修正し、モジュラー関係式の観点から明確化すべく研究中です。

研究成果の概要(英文)：The main achievement of our research is the completion of the book "Contributions to the theory of zeta-functions--modular relation supremacy" which has been the ultimate objective of this series of research under the support of the JSPS grant. The book elucidate all existing identities equivalent or consequences of the functions equation--zeta symmetry. We have made clear the threshold between the zeta-function with Euler product and without. We are reay to launching on Vol. 2 in which we will work with zets with Euler product.

研究分野：解析的整数論

キーワード：ゼータ関数 関数等式 モジュラー関係式 イーワルド展開 非加工モジュラー関係式 シータ変換公式

### 1. 研究開始当初の背景

ゼータ関数の関数等式に同値なすべての関係式 モジュラー関係式 の同定は最近著[ゼータ関数大全 モジュラーリレーション シュウプリマシー]において、オイラー積を必ずしも仮定しない一般の場合に確立されました。本研究では、オイラー積を仮定するいわゆるセルバーグクラスのゼータ関数に対して素数定理と同様のゼロフリーレンジョンなどを研究し、オイラー積付きのモジュラー関係式を同定することを問題としていました。

### 2. 研究の目的

上述のとおり、関数等式とオイラー積の両方を持つゼータ関数のクラスのモジュラー関係式・その系を同定し、理工学的応用を目指す。

### 3. 研究の方法

定期的なコロキウムでの討論会、精力的に研究している外国人研究者とメール・招聘などによって、共同研究を推進する。成果が上がった後に国内・海外で成果発表し、更なる発展を目指す。

### 4. 研究成果

(1) 関数等式に同値なモジュラー関係式の同定 このテーマは、応用面も念頭においた「ゼータ対称性」という標語の下、これまで 10 数年間に科学研究費補助金の研究の最終目的の一つでありました。苦節 40 年の「ゼータ関数大全 modular relation supremacy」(編著書[1])に結実致しました。その一部は、2015 年 9 月(10 日)のインドの特殊関数論国際会議にて、シータ関数、ベータ変換公式(メリン-バーンズ積分という名称の下で、バートン氏、松本氏、桂田氏等が広く用いて多くの成果を挙げられたもの)、イーワルド展開について解説致しました。2 個のガンマ因子を含む関数等式の場合に既知のものは、後者 2 つがすべてと言ってもよいくらいです。最近の A. Dixit 等の 10 編ほどの論文は、ラマヌジャン積分を扱っておりますが、すべてこのベータ変換型のモジュラー関係式の積分形に帰着します。

[6]は、上記「supremacy」の第 3 章「非加工モジュラー関係式」に相当する部分で、

関数等式に多重ガンマが含まれており、加工ガンマ因子がない場合をかなり詳しく述べたものです。とくにデデキンドゼータ関数およびランベール級数のこれまで知られていた結果を統合し、コシュリャコフの埋もれていた重要な貢献を掘り起して明確化したものです。[7]は、「supremacy」の第 4 章「フーリエ-ベッセル展開」に相当する部分で、ヘッケ ガンマ変換に対応するものとして、ベータ変換という名前を閉しました、数列をある変数だけずらした perturbed ディリクレ級数で与えられるゼータ関数のさまざまな局面を展開致したものです。モジュラー関係式の方にベータ変換の結果として、取り扱い可能なガンマ関数 2 個の積が現れ、他辺に変形ベッセル関数  $K$  が現れるのが典型的です。まず、ディリクレ類数公式の変形に現れるスタークの方法をベータ変換として同定したのち、コシュリャコフの結果を実 2 次体に至るまで明らかにしました。さらに(ハーディーの結果の一般化である)ポックナ-チャンドラセカラン-ナラシムハンの結果を一般化しております。

(2) ゼータ対称性の応用 [4]は、かなり一般的なゼータ関数であるバーンズのゼータ関数とそれに付随したバーンズ ガンマ関数の基礎づけを行ったものです。一方が一次結合の形の分岐型ゼータ対称性を持ちます。負の整数点における特殊値なども考察いたしました。[8]はインド HRI に滞在中に完成したもので、ゼータ対称性と同値なシータ変換公式の積分形から、リーマンの至る所微分不可能関数の有理点における微分可能性の判定のみならず、実にガウスの平方剰余の相互法則までが導出されるという結果であります。これまで、リーマンの至る所微分不可能関数に関して多くの研究がありましたが、有理点における場合はこれらをすべて凌駕するものであります。平方剰余の相互法

則はこれまで多くの証明があり，ムールティ-パセリの論文は，シータ関数の積分形の極限を考察することで2次のガウス和の相互法則に至っておりますが，[8]はさらにそれを進めた形で，上半平面上でわずかに右下がりの線分上の積分の近似を正確に求めるものです．

(3) 循環行列の一般化とその応用 論文 [1]，[2]は1行目を順にずらして並べることによって得られる循環行列の理論を用いて符号理論におけるブラハトの定理の3行の証明を与えるなど，より進んだ理論を用いれば応用面で用いられている重要な結果がより明確化されることを例証しました．関数等式とは離れますが，疑似対称性として，ゼータ対称性の退化したバージョンであると考えられます．[2]は[1]の一般化で，群環とその表現によって一般化・明確化したものです．

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

S. Kanemitsu and M. Waldschmidt, Matrices for finite abelian groups, finite Fourier transforms and codes, Proc. 6<sup>th</sup> China-Japan Sem. Number Theory, World Sci. 2013, January, 2013, 90-106.

L. Jiang, S. Kanemitsu and H. Kitajima, Circulants, linear recurrences and codes, Ann. Univ. Sci. Budapest . Eötvös Sect. Comput., 40 (2013), 363-377.

K. Chakraborty, S. Kanemitsu and T. Kuzumaki, Arithmetical class number formula for certain quadratic fields, Hardy-Ramanujan J. 36 (2013), 1-7.

K. Chakraborty, S. Kanemitsu and T. Kuzumaki, On the Barnes multiple zeta- and gamma function, Siaulai Math. Sem. 9 (2014), 27-41.

T. Kuzumaki, S. Kanemitsu and J. Urbanowicz, On congruences for certain sums of E. Lehmer's type, Hardy-Ramanujan J. 37 (2015), 1-28.

T. Arai, S. Kanemitsu and K. Chakraborty, On modular relations, Proc. seventh China-Japan Sem. Number Theory (Plowing and starring through high wave forms), 1-64, World Sci., New Jersey etc., 2015.

K. Chakraborty, S. Kanemitsu and H. Tsukada, Applications of the beta-transform, Siaulai Math. Sem. 10 (18), 2015.

K. Chakraborty, S. Kanemitsu and H. -L. Li, The quadratic reciprocity and Riemann's non-differentiable function, Res. Number Theory, to appear.

[学会発表](計 6 件)

金光滋 単 On Fourier series with arithmetical function coefficients 渭南師範学院数学系セミナー(中国, 渭南) 平成24年3月

金光滋 単 Linearized product of zeta-functions 洛陽数論会議(中国, 洛陽) 平成24年3月

金光滋 単 Evaluation of the probability integral 渭南師範学院数学系セミナー(中国, 渭南) 平成25年3月

金光滋 単 Quadratic reciprocity and Riemann's non-differentiable function 宝鷄数論会議(中国, 宝鷄) 平成25年3月

金光滋 単 Special functions in number theory 惠州大学学术講演会(中国, 惠州) 平成25年8月

金光滋 単 Special functions in number theory and science 特殊関数論国際会議基調講演 A. P. Agarwal 記念講演(インド, デリー) 平成25年9月

(4)研究協力者 ( )

〔図書〕(計3件)

S. Kanemitsu and H. Tsukada, Contributions to the theory of zeta-functions---modular relation supremacy, 303 pages, World Sci. Dec. 22 2014.

M. Kaneko, S. Kanemitsu and J. -Y. Liu, Plowing and starring through high wave forms—Proc. of the 7<sup>th</sup> China-Japan Seminar on number theory held at Kyushu University, Fukuoka Japan, 2013, World Sci. 191 pages, February 10, 2015.

S. Kanemitsu et al, Special issue of Pure Appl. Math. J. ``Abridging over Troubled Water---Scientific Foundation of Engineering Subjects `` Volume 4, Issue 2-1, 2015 March. 54 pages

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

金光 滋 (KANEMITSU, Shigeru)  
近畿大学産業理工学部・教授  
研究者番号：60117091

### (2)研究分担者

塚田 春雄 (TSUKADA, Haruo)  
近畿大学産業理工学部・教授  
研究者番号：00257990

### (3)連携研究者

( )

研究者番号：