

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 4 月 30 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400033

研究課題名(和文)代数多様体の周期に関する特殊関数の解析

研究課題名(英文)Analysis of special functions associated with periods of algebraic varieties

研究代表者

松本 圭司 (Matsumoto, Keiji)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：30229546

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：代数多様体の周期積分は広い意味での超幾何関数とみなすことができ、それらは局所的な解全体のなす線形空間(局所解空間)が有限次元となる線形微分方程式系をみたす。いくつかのこのような線形微分方程式系に対して、局所解空間の基底を並べてできる写像の大域的な挙動を記述するモノドロミー表現や未知関数をベクトル値にした連立1階方程式の接続行列の特徴づけを与えた。これらの研究においては、周期積分から自然に得られる局所係数の(コ)ホモロジー群に備わっている交点形式を用いることで、構造解明がなされている。

研究成果の概要(英文)：Period integrals of algebraic varieties can be regarded as hypergeometric functions, and they satisfy a system of linear differential equations so that a vector space of its local solutions (a local solution space) is finite dimensional. For some of such systems, I characterize the monodromy representation which describe a global property of a map defined by a basis of its local solution space, and the connection matrix of the first order differential equation with a vector-valued unknown function equivalent to the original system. In this study, I make clear their structures by using the intersection forms defined between twisted (co)homology groups which are induced from period integrals.

研究分野：特殊関数論

 キーワード：超幾何関数 超幾何微分方程式 局所係数ホモロジー群 局所係数コホモロジー群 交点形式 モ
 ノドロミー表現 接続行列

1. 研究開始当初の背景

平成 22～24 年度に採択された基盤研究 (C)(一般)：研究課題「特殊関数の幾何的研究」において、この研究につながる 2 つの研究成果が得られていた。

(1) 超楕円曲線について知られている Thomae 定理が射影平面の 6 直線で分岐する 2 重被覆として得られる $K3$ 曲面に対しても成立することが示されていた。その応用として (3, 6) 型超幾何級数に対する変数変換公式が得られ、新しい 4 種 4 項平均の反復についての極限表示定理が得られていた。

(2) Lauricella によって定義された多変数超幾何微分方程式系 F_0 に対して、モノドロミー表現とパッフ形式を局所係数の (コ)ホモロジー群に定まる交点形式を用いた表示が得られていた。

2. 研究の目的

楕円曲線の周期積分を介して、超幾何関数・微分方程式、楕円関数、テータ関数、保型形式、等についての数多くの公式が発見されていて、それらのうちのいくつかは他分野へも応用されていることがよく知られている。

この研究では、楕円曲線を代数多様体とみなして、拡張された周期積分に着目することで、研究を進める。具体的には、以下の 3 項目を研究目的の柱と位置付ける。

(1) 代数多様体の周期積分に関する局所係数 (コ)ホモロジー群、超幾何関数・微分方程式や保型形式・関数等がみだす多くの公式を構成する。

(2) これらの公式がもつ性質の代数的・幾何学的・組合せ論的な構造・背景をあきらかにする。

(3) 得られた公式たちを代数多様体のモジュライ理論や解析数論、等の他分野への応用を見出す。

3. 研究の方法

(1) 研究代表者と 3 名の連携研究者と密接な研究連携を行う。研究集会・セミナーおよび研究打合せ会等で、各自の役割に関する研究の進捗状況や問題点に関する情報交換を行う。研究集会としては、各年度の夏季に連携研究者の寺嶋教授と「玉原特殊多様体研究集会」を開催する。また、各年度末にこの研究に関係する話題を集めたセミナーもしくは研究集会を開催する。研究打合せは必要に応じて設定し、連携研究者との研究交流をすみやかに行う。

(2) この研究では、特殊関数に関する公式の発見およびその検算において、巨大なメモリーを要する計算がしばしば現れるものと予想される。その計算が実行可能となるように計算機関連の設備費・消耗品費に経費を十分に配分する。ノートパソコンと大容量ハードディスクの購入、数式処理ソフトウェアのインストール、等を計画する。また、連携研究者として、オープンソースの計算機代数(数式処理)システム RISA/Asir に精通している研究者を加えて、通常のパソコンでは処理しきれないような計算が生じた場合は、巨大計算の担当を担う体制を築いておく。

4. 研究成果

(1) 2 つの正数 a, b に対して、相加平均 $m_1(a, b) = (a+b)/2$ と相乗平均 $m_2(a, b) = (ab)^{1/2}$ を繰り返し行うことで、2 種類の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が定義される。その数列はともにある共通の値に収束し、 m_1 は超幾何関数を用いて表示できることが、ガウスによって発見された。そしてその表示公式は、楕円曲線のモジュライを定める変数 x を 2 倍する写像と対応しているという幾何学的な翻訳も知られている。また、相乗平均 $m_2(a, b)$ を $m_3(a, b) = [a(a+b)/2]^{1/2}$ に変えて $m_1(a, b)$ と $m_3(a, b)$ を繰り返し行うことでも、共通極限

値の超幾何関数による表示公式も存在している。この研究では、 i が虚数単位 i となるときに楕円曲線には $(1+i)$ 倍写像が定義でき、その写像の挙動を追跡することで、この表示公式を導くカギとなる公式が得られることを解明し、この極限公式の幾何学的な解釈を与えることに成功した。楕円曲線のモジュライ変数 τ が上半空間内の 1 の原始 6 乗根となる場合も、類似の公式と類似の幾何学的な解釈を与えている。

(5. 主な発表論文等, [雑誌論文])

(2) Appell は、4 種類の 2 変数超幾何級数 F_1, \dots, F_4 とそれらがみたす微分方程式系 E_1, \dots, E_4 を定めた。それらの方程式系のうち、 E_1, E_2, E_3 は単純な形の連立 1 階の方程式に変形できるが、 E_4 は独立変数の空間を 2 重被覆に持ち上げた場合でのみ単純な形の方程式系が知られていた。この研究において、2 重被覆に持ち上げないと単純な形にできないことを証明し、twisted cohomology groups 間にある交点形式を用いて微分方程式系の具体的な表示を与えた。そして、なぜ 2 重被覆に上げると微分方程式系が単純になるのかを解明した。

また、単純な形にできないことの証明は、 F_4 のさらなる多変数化である Lauricella により拡張された超幾何級数 F_C がみたす微分方程式系でも適応できることを指摘した。

(5. 主な発表論文等, [雑誌論文])

(3) 2 変数超幾何微分方程式系 Appell E_2 が可約となる場合の解空間の退化挙動とモノドロミー表現を与えた。また、パラメーターが $(a, b, b, c, c) = (4/3, 2/3, 2/3, 4/3, 4/3)$ の場合に、2 変数シュワルツ写像の挙動を調べた。モノドロミー表現を介して数論的三角群 $(3, \dots, \dots)$ が $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同群 $\Gamma_1(3)$ として現われることを解明した。

(5. 主な発表論文等, [雑誌論文])

(4) 超幾何微分方程式の常微分高階版である一般超幾何微分方程式と多変数超幾何微分方程式系 Lauricella F_C のモノドロミー表現に関しては、一つのサーキット行列を具体形に表示することが本質的な問題であることが知られている。そのサーキット行列を容易に求める別手段を与えた。いずれの場合もそれらの回路行列は、局所系ホモロジー群間にある交点形式に関する鏡映となっている。交点形式を表現する対角行列の成分を未知数とみなして、回路行列が有する局所的な性質から連立方程式を構成し、それを解くことで回路行列を決定するという今までにはない新しい手段を与えた。

(5. 主な発表論文等, [雑誌論文])

(5) 多変数超幾何微分方程式系 Lauricella F_A に対するパッフ形式の接続行列を局所系コホモロジー群間にある交点形式を用いて表示した。

(5. 主な発表論文等, [雑誌論文])

(6) k 次射影空間の $n+2$ 枚の超平面配置を独立変数とする超幾何微分方程式系 $E(k+1, n+2; \dots)$ ($\dots = (\dots_0, \dots_1, \dots, \dots_n, \dots_{n+1})$ はパラメーター) を解の積分表示に関する局所系コホモロジー群間にある交点形式を用いて表示した。また、パラメーターを整数ずらず操作に関する変換公式を交点形式を用いて表示した。また、共同研究者により、これらの結果が統計における 2 元分割表の正規化定数の計算に応用されている。

(5. 主な発表論文等, [その他])

(7) 多変数超幾何微分方程式系 Lauricella F_D に関して、twisted homology group が定義され、それをファイバーとする局所系が得られる。この局所系のモノドロミー表現は、パラメーターに関するある種の非整数条件のもとで研究されていた。その条件を大幅に

緩和し、表現が可約になる場合でも有効なものを与えた。

(5. 主な発表論文等, [その他])

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Matsumoto Keiji,
Monodromy representations of hypergeometric systems with respect to fundamental series solutions, to appear in Tohoku Mathematical Journal; <https://projecteuclid.org/current/euclid.tmj>

arXiv:1502.01826 [math.AG]
査読有, 印刷中.

Koguchi Yuto, Matsumoto Keiji, and Seto Fuko,
Schwarz maps associated with the triangle groups (2,4,4) and (2,3,6), to appear in Hokkaido Mathematical Journal; <http://hmj2.math.sci.hokudai.ac.jp>
arXiv:1505.01900 [math.AG]
査読有, 印刷中.

Matsumoto Keiji, Sasaki Takeshi, Terasoma Tomohide and Yoshida Masaaki,
An example of Schwarz map of reducible Appell's hypergeometric equation E_2 in two variables, to appear in Journal of the Mathematical Society of Japan; <http://mathsoc.jp/publication/JMSJ/>
arXiv:1503.07623 [math.AG]
査読有, 印刷中.

Goto Yoshiaki, Kaneko Jyoichi and Matsumoto Keiji,
Pfaffian of Appell's hypergeometric system F_4 in terms of the intersection forms of twisted cohomology groups, to appear in Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences; <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~prims/>
arXiv:1502.00795 [math.AG]
査読有, 印刷中.

Matsumoto Keiji,
Pfaffian of Lauricella's hypergeometric system F_A , to appear in Rokko Lectures in Mathematics; <http://www.math.kobe-u.ac.jp/~home-j/ro>

[kko.html](#)

arXiv:1502.00334 [math.AG]
査読無, 印刷中.

[学会発表](計10件)

寺杣友秀

open K3 surface に関するトレリの定理
数論幾何・超幾何 研究交流会
2016年3月11日
北海道大学理学部(北海道・札幌市)

松本圭司

一般超幾何関数 ${}_3F_2$ のある2変数版
超幾何方程式研究2016
2016年1月7日
神戸大学瀧川記念学術交流会館(兵庫県・神戸市)

松本圭司

一般超幾何関数の F_C 型多変数化
第9回玉原特殊多様体研究集会
2015年8月27日
東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県・沼田市)

松本圭司

一般超幾何関数 ${}_3F_2$ の F_4 型2変数化
琉球超幾何セミナー
2015年2月13日
琉球大学理学部(沖縄県・中頭郡西原町)

松本圭司

交点形式と rigidity によるモノドロミーの考察
超幾何方程式研究会2015
2015年1月7日
神戸大学瀧川記念学術交流会館(兵庫県・神戸市)

松本圭司

交点形式と rigidity による超幾何方程式系の考察
第8回玉原特殊多様体研究集会
2014年9月19日
東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県・沼田市)

松本圭司

多変数超幾何関数の Pfaffian 方程式とモノドロミー2
超幾何学校2014
2014年9月1, 2日
神戸大学理学部(兵庫県・神戸市)

松本圭司

算術幾何平均の類似品に関する種々の公式
オホーツク特殊関数セミナー
2014年2月17日
北見工業大学(北海道・北見市)

松本圭司

不完全周期積分の逆周期写像について
(II),
第7回玉原特殊多様体研究集会
2013年9月12日
東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県・
沼田市)

寺杣友秀

不完全周期積分の逆周期写像について (I),
第7回玉原特殊多様体研究集会
2013年9月11日
東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県・
沼田市)

[その他]

ホームページ等

Open e-print archive に掲載中の論文

Goto Yoshiaki and Matsumoto Keiji,
Pfaffian equations and contiguity
relations of the hypergeometric
function of type $(k+1, k+n+2)$ and their
applications,
<http://arxiv.org/abs/1602.01637>

Matsumoto Keiji,

The monodromy representations of local
systems associated with Lauricella's F_D ,
<http://arxiv.org/abs/1604.06226>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松本 圭司 (MATSUMOTO, Keiji)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 30229546

(2) 連携研究者

小原 功任 (OHARA, Katsuyoshi)
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号: 00313635

寺杣 友秀 (TERASOMA, Tomohide)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号: 50192654

吉田 正章 (YOSHIDA, Masaaki)
九州大学・名誉教授
研究者番号: 30030787