

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 11 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400034

研究課題名(和文)代数的手法に基づく種々の組合せ的对象の総合的研究

研究課題名(英文)A comprehensive study of combinatorial objects by algebraic methods

研究代表者

田中 太初(TANAKA, Hajime)

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：50466546

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：完全グラフの特殊な分割であるアソシエーションスキームの各頂点に対して定まる Terwilliger 代数等の非可換半単純代数の表現論について、理論・応用の双方の観点から研究を行い、極値集合論・デザイン理論・符号理論等に関する種々の結果を得た。この際に用いた表現論の応用の手法は、半正定値計画法の双対性や、各既約加群に付随する直交多項式の性質等を駆使するものであり、研究代表者も関わって近年発展してきたこれらの手法をさらに深化・整備することができた。

研究成果の概要(英文)：I studied, from the viewpoints of both theory and applications, the representation theory of several non-commutative semisimple algebras, such as the Terwilliger algebra attached to each vertex of an association scheme, which is a certain special decomposition of a complete graph. I obtained various results related to extremal set theory, design theory, coding theory, etc., where the representation theory is applied together with the duality of semidefinite programming as well as systems of orthogonal polynomials associated with irreducible modules of these algebras. I have been involved with the recent development of the new tools, and this project contributed to further deepening and strengthening of them.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：アソシエーションスキーム 距離正則グラフ Terwilliger 代数 半正定値計画 直交多項式 符号
組合せデザイン

1. 研究開始当初の背景

完全グラフの特殊な分割である(可換)アソシエーションスキームは、有限群の等質空間の組合せの性質を抽出した概念であり、実験計画法、符号理論、デザイン理論、スピンモデル等の多様な分野に於いて統一的枠組みを提供する。これらの分野への「応用」では、従来中心化環に相当する可換半単純 C-代数(Bose-Mesner 代数)の役割が本質的であったが、A. Schrijver による符号の半正定値計画境界の導入(2005 年)を一つの発端として、アソシエーションスキームの各頂点に付随し Bose-Mesner 代数を含む Terwilliger 代数等の非可換半単純 C-代数の表現論を本格的に用いる試みが行われ始めた。

2. 研究の目的

本研究計画は同じ研究代表者による若手研究(B)(課題番号:23740002,平成23~24年度)の後継課題であり、Terwilliger 代数等の表現論の手法をさらに深化させ、上述の「応用」の多くを包括する拡張理論の整備を進めることを主目的とする。

3. 研究の方法

(1)訪問或いは招聘による直接の研究打合せについては、主なものは以下の通りである。
①訪問:坂内英一氏・坂内悦子氏・Yan Zhu 氏(上海交通大学),平成26年11月
②招聘:Yan Zhu 氏(上海交通大学),平成28年3月; Paul Terwilliger 氏(Wisconsin 大学 Madison 校),平成26年12月~平成27年1月; Edy Tri Baskoro 氏(Bandung 工科大学),平成28年4月
これらの集中的な研究打合せの成果は、主に下記「4. 研究成果」(4)に反映されている。

(2)本研究計画に関連した国内外の研究に関して効率的な情報交換を行う観点から、複数の研究集会の開催に関わった。主なものは以下の通りである。
①「スペクトラルグラフ理論および周辺領域」(平成25年11月(東北大学),平成27年3月(広島工業大学),平成27年11月(筑波大学),平成28年11月(神戸大学))
②「第31回代数的組合せ論シンポジウム」・「代数的組合せ論夏の学校2014」(平成26年6月(東北大学・秋保リゾートホテルクレセント))
③「代数的組合せ論仙台勉強会」(平成27年5月,平成29年3月(東北大学))
④「ミニ集会:代数的組合せ論とその周辺」(平成28年3月(東北大学))

(3)極値集合論や相対デザインに関する研究(「4. 研究成果」(2),(4))等では、コンピュータを用いて多くの実験・検証を行った。

半正定値計画の計算では、必要に応じて NEOS Server (<http://neos-server.org/neos/>)等のオンラインツールも活用した。

4. 研究成果

(1) Tilburg 大学の Edwin van Dam 氏及び中国科学技術大学の Jack Koolen 氏と共同で、距離正則グラフに関する概説論文を執筆した(雑誌論文(3))。これは1990年代以降の進展を網羅することを目指して平成23年度に開始したプロジェクトであり、最終的に156ページ及び650以上の引用文献を擁するものとなった。この論文の執筆作業を通して得られた距離正則グラフの理論に関する膨大な知見の蓄積は、今後の研究の基盤となるものである。なお、この作業の一環として入門講義も行った(学会発表(8))。

(2)極値集合論で重要な Erdős-Ko-Rado の定理及びその拡張は、P. Delsarte により創始された Bose-Mesner 代数に基づく線型計画の手法の優れた応用例であるが、琉球大学の徳重典英氏及び愛知教育大学の須田庄氏と共同で、有限集合の二つの部分集合族の間のある種の測度を考慮した交叉に関する定理を証明した(雑誌論文(1))。ここで用いた半正定値計画の双対性に基づく代数的手法は Delsarte の手法の「二部グラフ版」であり、他の応用を検討中である。この成果については2件の口頭発表を行った(学会発表(3),(4))。

(3)中国科学技術大学の Jack Koolen 氏、(元)浦項工科大学の Woo Sun Lee 氏及び Worcester 工科大学の Bill Martin 氏と共同で、Hamming グラフ上の「等差完全正則符号」に関する論文を執筆した(雑誌論文(4))。この論文ではまず当該概念の導入、基礎理論の展開を行った後、線形なものについて分類を本質的に完成させた。距離正則グラフ上の完全正則符号は Terwilliger 代数の拡張(下記(4)参照)と密接に関連したトピックであり、本研究計画に沿ったものである。

(4)距離正則グラフの Terwilliger 代数の研究を重点的に継続して行った。理論面では、従来各頂点に付随させる Terwilliger 代数を、descendent と呼ばれる代数的・幾何的に非常に良い性質を持った頂点部分集合に拡張して考察した。この研究は田中利恵氏及び私の学生の渡邊悠太氏と共同で進めており、特に「Terwilliger 多項式」と呼ばれる4次多項式の理論の拡張・一般化を行った。また、重要な距離正則グラフの例である Grassmann グラフの Terwilliger 代数の既約加群を全て決定することに成功した。この成果については共著論文を執筆中であり、内容の一部について1件の招待講演を行った(学会発表(5))。これに関連した成果として、外国人特別研究

員の Jae-Ho Lee 氏と共同で、やはり重要な距離正則グラフの例である双対極グラフに関して Terwilliger 代数をさらに拡大した代数を導入し、ランク 1 のダブルアフィンヘッケ環のある種の退化との関連や、付随するローラン直交多項式系(双対 q -Krawtchouk 多項式)について研究を行った。共著論文を執筆中である。

一方応用面では、上海交通大学の坂内英一氏、坂内悦子氏、Yan Zhu 氏と共同で、(主に)2進 Hamming グラフ上の「相対デザイン」に関する研究を行った。タイト、すわなち所謂 Fisher 型不等式で等号が成立し、さらに二つの「同心球面」上にある相対デザインが、コヒーレント配置と呼ばれる構造を持つことを Terwilliger 代数の表現論を用いて証明した。さらにそのような相対デザインの存在がある種の直交多項式(Hahn 多項式)の根の整数性を導くことを証明し、これを用いて小さなパラメータの範囲の多くで非存在を示した。この成果についてもやはり共著論文を執筆中であり、1 件の口頭発表を行った(学会発表(2))。なお、デザイン理論については同じ 4 名で概説論文も執筆し、今後の研究について、いくつかの有力な方向性を提示した(雑誌論文(2))。また、私の学生の John Vincent Morales 氏とは、Hamming グラフを一般化したアソシエーションスキームの Terwilliger 代数の表現論の研究を進め、符号理論で有名な Assmus-Mattson の定理を拡張することに成功した。これは K. Tanabe による特に重要な $Z/4Z$ 上の符号の場合を含み、線形性の仮定が不要であることが特徴である。現在論文を投稿中(arXiv:1610.07334)であり、1 件の口頭発表を行った(学会発表(1))。

(5) 組合せ論内外の諸分野への、可換・非可換代数の表現論に基づく手法のさらに広範な応用の可能性を探るため、Bandung 工科大学の Edy Tri Baskoro 氏や Djoko Suprijanto 氏達と、グラフの次数/直径問題や Ramsey 理論等について情報交換を行った。現段階では具体的な成果は出ていないが、重要な検討課題として今後も継続して取り組みたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- (1) Sho Suda, Hajime Tanaka, and Norihide Tokushige, A semidefinite programming approach to a cross-intersection problem with measures, *Mathematical Programming*, 2017 年, 印刷中, 査読有.
DOI: 10.1007/s10107-016-1106-3
- (2) Eiichi Bannai, Etsuko Bannai, Hajime Tanaka, and Yan Zhu, Design theory

from the viewpoint of algebraic combinatorics, *Graphs and Combinatorics*, 33 巻, 2017 年, 1-41, 査読有.

DOI: 10.1007/s00373-016-1739-2

- (3) Edwin R. van Dam, Jack H. Koolen, and Hajime Tanaka, Distance-regular graphs, *Electronic Journal of Combinatorics*, 2016 年, #DS22 (156pp), 査読有.
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS22>
- (4) Jack H. Koolen, Woo Sun Lee, William J. Martin, and Hajime Tanaka, Arithmetic completely regular codes, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 17 巻, 2016 年, 59-76, 査読有.
<https://dmtcs.episciences.org/2150>
- (5) Eiichi Bannai and Hajime Tanaka, Appendix: On some Gelfand pairs and commutative association schemes, *Japanese Journal of Mathematics*, 10 巻, 2015 年, 97-104, 査読有.
DOI: 10.1007/s11537-014-1390-8
- (6) Eiichi Bannai, Etsuko Bannai, Sho Suda, and Hajime Tanaka, On relative t -designs in polynomial association schemes, *Electronic Journal of Combinatorics*, 22 巻, 2015 年, #P4.47 (17pp), 査読有.
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v22i4p47>

[学会発表] (計 11 件)

- (1) 田中太初, An Assmus-Mattson theorem for codes over commutative association schemes, 研究集会「実験計画法と符号および関連する組合せ構造」, 秋保リゾートホテルクレセント(宮城県仙台市), 2016 年 11 月 28 日.
- (2) Hajime Tanaka, On tight relative t -designs in hypercubes, Mini-Symposium: Hadamard Matrices and Combinatorial Designs, The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA 2016), 京都大学(京都府京都市), 2016 年 5 月 24 日.
- (3) Hajime Tanaka, A semidefinite programming approach to a cross-intersection problem with measures, *Systems of Lines: Applications of Algebraic Combinatorics*, Worcester Polytechnic Institute, Worcester (MA, 米国), 2015 年 8 月 13 日.
- (4) 田中太初, A semidefinite programming approach to a cross-intersection problem with measures, 第 32 回代数的

組合せ論シンポジウム, 金沢大学(石川県金沢市), 2015年6月22日.

- (5) Hajime Tanaka, The Terwilliger algebra of a Q -polynomial distance-regular graph with respect to a set of vertices, Algebraic Combinatorics Workshop, University of Science and Technology of China, 合肥(中国安徽省), 2014年11月29日.
- (6) 田中太初, Delsarte 理論入門, 代数的組合せ論「夏の学校 2014」, 秋保リゾートホテルクレセント(宮城県仙台市), 2014年6月16日.
- (7) 田中太初, On relative t -designs in polynomial association schemes, 代数的組合せ論ミニ集会, 神戸学院大学(兵庫県神戸市), 2014年3月7日.
- (8) Hajime Tanaka, Introduction to the theory of distance-regular graphs, International Joint Research Week on Non-Commutative Stochastic Systems: Analysis, Modelling, and Applications, 東北大学(宮城県仙台市), 2014年2月5日.
- (9) 田中太初, A cross-intersection theorem for vector spaces based on semidefinite programming, 離散数学とその応用研究集会 2013, 山形市保健センター(山形県山形市), 2013年8月10日.
- (10) 田中太初, A cross-intersection theorem for vector spaces based on semidefinite programming, 第30回代数的組合せ論シンポジウム, 静岡大学(静岡県浜松市), 2013年6月26日.
- (11) Hajime Tanaka, A cross-intersection theorem for vector spaces based on semidefinite programming, 8th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Pannon Egyetem, Veszprém (ハンガリー), 2013年6月7日.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~htanaka/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 太初 (TANAKA, Hajime)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号: 50466546