様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９ （共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 ２６ 日現在

機関番号： １２６０５
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2013～2015
課題番号： ２５４０００３５

研究課題名（和文） 正標数の代数多様体と特異点のフロベニウス直像の構造に関する研究

研究課題名（英文） Research on the structure of the Frobenius push-forwards on algebraic varieties and singularities in positive characteristic

研究代表者
原　伸生（Hara, Nobuo）

東京農工大学・工学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：９０２９８１６７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：正標数の代数多様体とその特異点のフロベニウス直像が，代数多様体の大域的・局所的な幾何をどのように反映するかを解明するため，幾つかの射影多様体と特異点に対象を絞って以下の研究成果を得た．
1．単純楕円型特異点のF爆発列の構造を，標数p＞0と最小特異点解消における例外楕円曲線Eの自己交点数，およびEが通常楕円曲線か超特異的かによって分類した．
2．射影平面を一般の位置にあるn点で爆発して得られる曲面の構造層のフロベニウス直像について研究し，とくにn＝4の場合に，累次フロベニウス直像の直既約直和因子を決定し，その有限性(GFFRT)などを示した．またn＝10においてはGFFRTでない例を構成した．

研究成果の概要（英文）：We studied the Frobenius push-forwards on algebraic varieties and their singularities in positive characteristic p, focusing on a few classes of projective varieties and normal surface singularities. Our results are as follows.
1. We classified the structure of the F-blowup sequence of a simple elliptic singularity in terms of the characteristic p, the self-intersection number of the exceptional elliptic curve E on the minimal resolution, and whether E is ordinary or supersingular.
2. We studied the Frobenius push-forward of the structure sheaf of the surface obtained by blowing up the projective plane at n points in general position. In case n=4 (del Pezzo surface of degree 5), we determined all the indecomposable direct summands of the iterated Frobenius push-forwards, and proved that their isomorphism classes are finite (GFFRT). We also proved that these Frobenius summands generate the derived category in case n=4. In case n=10, we constructed a rational surface that is not GFFRT.

研究分野： 代数学

キーワード： 代数幾何　正標数　フロベニウス直像　F爆発　大域的F有限型　大域的F正則　特異点　ベクトル束

１．研究開始当初の背景

正標数の代数多様体或いはその特異点を，フロベニウス写像を用いて研究する際の手段として，F 分裂性や，F 純，F 正則などの F-特異点，さらに F 爆発などの概念が知られている．F 分裂性と F 純性は，大域的或いは局所的に，構造層のフロベニウス直像が自由な直和因子をもつことを意味しているが，F 爆発の研究においては，フロベニウス直像の自明でない直和因子として何が現れるかという問題を含めて，フロベニウス直像そのもののの構造を解明する必要が生じてきた．

２．研究の目的

上記の背景を踏まえ，本課題においては以下の問題意識の下で研究を行なった．正標数の代数多様体或いはその特異点上の加群，例えば構造層などのベクトル束の累次フロベニウス射による直像の構造を研究し，これら累次フロベニウス直像の構造及び振舞いと，正標数の代数多様体特有の双有理変換である F 爆発，さらに F 正則性などの大域的・局所的な性質との関係を明らかにすることにより，正標数の代数多様体の幾何に対する理解を深めていくことが本研究の目的である．

３．研究の方法

本研究の内容は純粋数学であり，研究方法は理論的考察及び机上の計算などを主として研究代表者が単独で行なうことによるものである．また，必要に応じて，正標数の代数幾何関係の研究者との相互訪問による研究打ち合せ，研究集会の場における議論などを行い，研究遂行に必要な情報を得た．

４．研究成果

（1）単純楕円型特異点の F 爆発：前研究課題からの継続研究として，正標数 p の正規曲面特異点のうちとくに，(p=2,3,5 の) 有理 2 重点と単純楕円型特異点の F 爆発を研究してきたが(論文③参照)，そのうち単純楕円型特異点の F 爆発の構造が完全に決定できたので，その結果を下記論文②にまとめた．そこで得られた主結果は以下の通りである．

定理．(X,x) を標数 $p>0$ の代数閉体上で定義された単純楕円型特異点，E をその最小特異点解消 Y 上の例外楕円曲線とする．このとき次の三条件は同値である．

（i）交点数 $-E^2$ が標数 p のベキでない．

（ii）(X,x) の F 爆発列が安定化する．

（iii）$e\geqq 1$ に対し (X,x) の e 次 F 爆発が最小特異点解消と一致する．

この定理より，交点数 $-E^2$ が p ベキのとき(注：$-E^2=1=p^0$ の場合も含む)のとき，(X,x) の F-爆発列は安定化しないことがわかるが，このような F 爆発列に現れる個々の e 次 F 爆発の構造は，楕円曲線 E が通常楕円曲線か超特異楕円曲線かによって異なり，p=2, e=1 かつ $E^2=-1,-2$ のとき例外的に非正規な F 爆発が現れる場合を除いて完全に決定できた．

（2）単純楕円型特異点の族が与えられたとき，その族の同時 F 爆発が存在する条件について考察し，E_6 型単純楕円型特異点の族で同時 F 爆発をもつ例を構成した(一般の存在条件については予想はあるが，証明はない)．

また，(1)の手法を種数 $g\geqq 2$ の非特異射影曲線上の錐特異点に適用し，以下の部分的結果を得た：C を標数 $p>0$ の代数閉体上で定義された種数 g の非特異射影曲線，L を C 上の次数 $d>0$ の直線束とし，切断次数環 $R=R(C,L)$ に対して $X=\mathrm{Spec}\,R$ とおく．このとき，$d\geqq 2g+1$，かつ，$p^e\neq 0,-1,\cdots,2-2g \pmod d$ ならば，X の e 次 F 爆発の正規化は最小特異点解消と一致する．

（3）ある種の有理曲面のフロベニウス直像：正標数の射影平面上で一般の位置にある n 点を爆発して得られる有理曲面の構造層の累次フロベニウス直像の構造について研究した．n $\leqq 3$ の場合はトーリック曲面となりフロベニウス直像は直線束に分解することが知られているため，はじめに考えるべき $n=4$ の場合を中心に，下記論文①で考察した．

定理．標数 $p>0$ の射影平面 $\mathbf{P}^2$ 上一般の位置にある 4 点を爆発して得られる有理曲面を X，4 本の例外曲線を E_1,E_2,E_3,E_4 とし，H を $\mathbf{P}^2$ 上の直線の X への引き戻し，$E=E_1+E_2+E_3+E_4$ とする．このとき，X の構造層の e 次フロベニウス直像 $(F^e)_*O_X$ (e=0,1,2,⋯) の直和因子として現れる直既約ベクトル束は，以下のいずれかである．

（i）直線束 O_X，$L_0=O_X(E-2H)$，および，$L_i=O_X(E_i-H)$ (i=1,2,3,4)；

（ii）次の非自明な拡大で与えられる階数 2 の直既約ベクトル束 G：

$$0\to O_X\to G\to L_0\to 0$$

（iii）次の非自明な拡大で与えられる階数 3 の直既約ベクトル束 B：

$$0\to L_1\oplus L_2\to B\to O_X(E_1+E_2-H)\to 0$$

この定理において，フロベニウス直像 $(F^e)_*O_X$ に現れる各直和因子の個数も求められたことにより，フロベニウス直像の構造が完全に決定された．この 4 点爆発 X のように累次フロベニウス直像 $(F^e)_*O_X$ (e=0,1,2,⋯) たちの直和因子として現れる直既約な連接層の同型類が高々有限個であるような X を大域的有限 F 表現型(GFFRT)とよぶ．トーリック曲面は GFFRT であることが知られているから，射影平面の n 点爆発は $n\leqq 4$ では GFFRT ということになる．射影平面の n 点爆発として得られる有理曲面 X について，X が GFFRT となる n の上限が存在するか，存在するとき上限を与える n は何か?という自然な問が発生するが，これに関連して(n 点が一般の位置にある場合ではないが)，以下の例を構成した．

命題．kを素体$\mathbf{F}_p$の代数閉包とし，k上の射影平面$\mathbf{P}^2$に楕円曲線Cと10点$P_1,\cdots,P_{10}\in C$をとる．このとき，$\mathbf{P}^2$を10点$P_1,\cdots,P_{10}$で爆発して得られる曲面XはGFFRTではない．

(4)フロベニウス直像と導来圏: Bondalは，トーリック多様体Xのフロベニウス直像$F_*\mathcal{O}_X$が導来圏 $D^b(X)$を生成するという予想を提出した．この予想の『トーリック』という条件を外した最も単純な場合として，(3)で考察した射影平面の4点爆発が考えられる．論文①において,この4点爆発の場合においても，$p^e\geqq 3$ ならフロベニウス直像$(F^e)_*\mathcal{O}_X$が導来圏を生成することを示した．より精しく，(3)の4点爆発の状況と記号において，フロベニウス直像の直和因子 $G,L_0,L_1,L_2,L_3,L_4,\mathcal{O}_X$が X上の充満強例外列(full strong exceptional sequence)をなすことを示した．

(5) 上記(3),(4)は，主に射影平面を一般の位置にある4点で爆発して得られる曲面に関する考察が中心となった．爆発する点の個数が $n\geqq 5$ の場合には，ベクトル束及びそのフロベニウス直像の拡大類を行列表示し，その『拡大行列』に一種の基本変形を施して構造を研究する方法を考案したが,$q=p^e$と nが大きくなると『拡大行列』のサイズが非常に大きくなり計算が困難であることが判明した．この $n\geqq 5$ の場合及びより一般のフロベニウス直像の構造の解析は，本研究課題においては完成できず，今後の課題として残った．

一方，$\mathbf{P}^2$の4点爆発Xにおいては，累次フロベニウス直像$(F^e)_*\mathcal{O}_X$の直和因子となる唯一つの階数≧2の直既約ベクトル束 Gの双対束が，古典的に知られている X の(2,5)-Grassmann 多様体への埋め込みの普遍商束の引き戻しと一致することなどの事実が副産物として得られた．

5．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

① Nobuo Hara, Looking out for Frobenius summands on a blown-up surface of $\mathbf{P}^2$, Illinois J. Math.，査読有，**59** (2015), 115-142.

② Nobuo Hara, Structure of the F-blow-ups of simple elliptic singularities, J. Math. Sci. Univ. Tokyo，査読有，**22**, Kodaira centennial issue (2015), 193-218.

③ Nobuo Hara, Tadakazu Sawada and Takehiko Yasuda, F-blowups of normal surface singularities, Algebra & Number Theory，査読有，**7** (2013), 733-763.
DOI: 10.2140/ant.2013.7.733

〔学会発表〕（計 6　件）

① Nobuo Hara, A few remarks on Frobenius summands on rational surfaces, Younger Generation in Algebraic Geometry and Complex Geometry, 2016年1月14日，国立台湾大学，台北市．

② 原　伸生, A few remarks on Frobenius summands on rational surfaces, RIMS研究集会「特異点と不変量」, 2015年12月15日，京都大学数理解析研究所．

③ 原　伸生, Looking out for Frobenius summands on certain rational surfaces, 研究集会「代数多様体とその周辺」, 2014年9月29日，琉球大学．

④ Nobuo Hara, Frobenius push-forwards on rational surfaces, Birational Geometry and Singularities in Positive Characteristic, 2013年11月5日，東京大学数理科学研究科．

⑤ 原　伸生, Stabilization of F-blowup sequences and Frobenius push-forward, 代数幾何学城崎シンポジウム, 2013年10月22日，城崎大会議館．

⑥ Nobuo Hara, Stabilization of the F-blowup sequences and Frobenius push-forward, The Commutative Algebra of Singularities in Birational Geometry, 2013年5月10日, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　原　伸生（HARA, Nobuo）
　東京農工大学・大学院工学研究院・教授
　研究者番号：９０２９８１６７

(2)研究分担者
　　　　　　　(　　　)

　研究者番号：

(3)連携研究者
　　　　　　　(　　　)

　研究者番号：