

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 26 日現在

機関番号：12605

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400036

研究課題名(和文) Frobenius 多元環の表現

研究課題名(英文) Representations of Frobenius algebras

研究代表者

山形 邦夫 (Yamagata, Kunio)

東京農工大学・工学(系)研究科(研究院)・名誉教授

研究者番号：60015849

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：有限次元フロベニウス多元環や森田多元環の構造を環論や群論、表現論的観点から考察した。フロベニウス多元環については、それが軌道多元環としての構造を持つ条件をアウスランダー・ライテン クイバーの切断によって特徴付けた。フロベニウス多元環の一般化である森田多元環の構成についての成果として、一般の多元環の生成素の準同型多元環が森田多元環になるための条件を決定した。この応用として森田多元環と高次アウスランダー多元環との関係を明らかにした。また或る群環のブロックのカルトン行列について単純加群の次元との関係を解明した。

研究成果の概要(英文)：We studied Frobenius algebras and Morita algebras, giving applications of them. One of the main results is a characterization of Frobenius algebras with some section in the AR quiver, and the other is a characterization for the endomorphism algebras of generators to be Morita algebras, which clarifies a relation between Morita algebras and higher Auslander algebras. We described the Cartan matrices of blocks of some group algebras by using the dimensions of simple modules.

研究分野：代数学

キーワード：多元環 加群 表現 圏

1. 研究開始当初の背景

本研究代表者と海外研究協力者 A.Skowroński 氏や O.Kerner 氏等との共同研究により、フロベニウス多元環やその周辺について研究が進められていた。

(1) フロベニウス多元環の構造と加群圏の関係については Skowroński 氏を中心とするポーランドの研究グループによって多くの研究が行われている。他方、代表者と Skowroński 氏との共同研究により、フロベニウス多元環が軌道多元環であるための Skowroński-Yamagata の判定定理を利用して、加群圏の性質によりフロベニウス多元環の構造が調べられていた。またフロベニウス多元環の環構造の重要な情報を与えるカルタン行列の解明は、とくに群環において、連携研究者の清田氏など日本人研究者を中心に研究が進められている。

(2) 2011年の M. Fang -S. Koenig の研究を契機として、森田多元環 (1950年代に森田紀一によって研究された多元環) を見直す機運が高まり、本研究代表者や Kerner, Fang 等によって、新しい理論としての研究が始まった。

2. 研究の目的

フロベニウス多元環やその周辺の多元環について、環としての構造を環論や群論、表現論的な面から明らかにすることと、森田多元環の持つ加群面での性質を調べて森田多元環の理論を構築する。

3. 研究の方法

(1) フロベニウス多元環の構造については、部分加群圏の性質を調べて Skowroński-Yamagata の判定定理を適用するという方法をとった。また群環の構造についてはカルタン行列を調べる方法をとった。

(2) フロベニウス多元環の一般化として得られた森田多元環の解明については

Kerner 氏と研究を開始して歴史が浅いため、環論面や表現論、ホモロジー的次元等について、様々な面から考察する計画を立てた。

これらの研究の実現のために、共同研究者や関連する研究を行っている研究者の所属機関への訪問や招聘などを行った。特に、これまでの研究成果を整理して単行本として刊行するため、共同執筆者である Skowroński 氏を招聘したり、氏の所属する研究期間を訪問して、執筆の準備や共同研究を行った。また国内外の研究機関や研究集会において研究成果の発表や情報収集を行った。

4. 研究成果

(1) フロベニウス多元環の軌道多元環構造に関して Skowroński 氏と研究を行った。それによる主な成果は次の通りである (雑誌論文②)。

フロベニウス多元環の Auslander-Reiten クイバー (AR クイバー) における或る切断が、その左 AR 移動から切断への射と切断から右 AR 移動への射がともに零のみであるとき、その切断を二重移動剛性を持つと定義した。二重移動剛性を持つ切断は有限有向グラフとなり、対応する有限次元加群とその準同型多元環が定まる。また切断が半正則であるということと正則であるという二つの性質を定義した。これらのもとで、フロベニウス多元環の AR クイバーが半正則かつ二重移動剛性をもつ安定な切断を有するのは、フロベニウス多元環が或る傾斜多元環による軌道多元環によって規定される場合であり、その傾斜多元環を定義する傾加群の直和因子の性質と、傾斜多元環による反復多元環の自己同型写像の性質とにより、フロベニウス多元環の軌道多元環としての構造は二種類の場合に分類

される。一つは、軌道多元環がフロベニウス多元環に同型であり、他の場合には、軌道多元環とフロベニウス多元環とは礎石の違いのみで一致する（礎石同型）。ただし多元環の基礎体が代数的閉体の場合には、フロベニウス多元環と軌道多元環はつねに同型となる。フロベニウス多元環が無限表現型である場合には、AR クイバーが正則二重移動剛性を持つ安定な切断を有することは、フロベニウス多元環が非 Dynkin 型の傾斜多元環と反復多元環の或る正自己同型写像とによって定まる軌道多元環に礎石同型となることと同値である。この場合も、基礎体が代数的閉体であれば両多元環は同型となる。これらの結果は AR クイバーの局所的な性質からフロベニウス多元環の軌道多元環構造が実現されることを示すものである。

群環については、正標数代数的閉体上の可解群による群環を対象とし、ブロックについて、そのカルタン行列の性質を群の構造と関連付けて研究した。その結果、清田氏は、ある条件の下に、ブロックのカルタン行列はブロック上の単純加群の次元を用いて書き表せることを証明し、とくに主ブロックに対しては、カルタン行列から逆に可解群の構造を決定できる条件を求めた（雑誌論文③④）。

(2) 森田多元環に関して Kerner 氏と共同研究を行い、得られた主な成果は次の通りである（雑誌論文①）。

森田多元環はフロベニウス多元環上の生成素の準同型環として与えられる。しかし一般にはフロベニウスとは限らない多元環上の生成素からも森田多元環が得られる。これに関して次の事実を発見した。一般の多元環上の生成素の準同型多元環が森田多元環であるためには、生成素は森田多元環上の生成素であり、その制御次元が2以上である。このとき、準同型森田多元環の制

御次元は生成素の制御次元を超えないことがわかり、また森田多元環を定義するフロベニウス多元環は（森田同値の違いを除いて）一意的に定まることを証明した。これらは多元環とその双対加群とから定まる或る両側加群（標準加群）の忠実性についての考察の結果として得られたものである。この主定理の応用として、生成かつ余生成素の準同型多元環が森田多元環であるための条件を標準加群によって決定し、高次 Auslander 多元環（生成かつ余生成素の準同型多元環である）と森田多元環との関係を解明した。

本研究で現れた標準加群はどのような有限次元多元環に対しても定義されるものであり、フロベニウス多元環の特徴付けとして50年以上に渡り未解決問題である中山予想とも深い関わりがある。したがって標準加群をさらに研究することは今後の重要な課題である。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計4件）

- ① Otto Kerner, Kunio Yamagata, Morita endomorphism algebras of generators, *Algebras and Representation Theory*, 査読有、Vol. 19, No. 3, 2016, pp.749-759, DOI:10.1007/s10468-016-9601-z
- ② Andrzej Skowroński, Kunio Yamagata, On selfinjective algebras of tilted type, *Colloquium Mathematicum*, 査読有、Vol.141, No.1, 2015, pp. 89-117 DOI:10.4064/cm141-1-9
- ③ Masao Kiyota, On Cartan matrices determined by the dimensions of simple modules, 数理解析研究所講義録1967、査読無、2015, pp. 126-128

④ Masao Kiyota, On Cartan matrices with two parameters, 数理解析研究所講究録 1926、査読無、2014, pp. 49-53

〔学会発表〕（計 11 件）

① 山形邦夫、On Morita algebras and Auslander algebras, The 4th Advances in Representation Theory of Algebras, 2015 年 6 月 23 日、Guanajuato (Mexico)

② 清田正夫、On Cartan matrices determined by the dimensions of simple modules、有限群のコホモロジー論とその周辺、2015 年 2 月 18 日、京都大学数理解析研究所（京都・京都市左京区北白川追分町）

③ 山形邦夫、森田多元環について、可換環論と表現論、2014 年 10 月 11 日、岡山大学理学部（岡山・岡山市北区津島中）

④ 清田正夫、On Cartan matrices with two parameters、有限群とその表現・頂点作用素代数・代数的組合せ論の研究、2014 年 3 月 4 日、京都大学数理解析研究所（京都・京都市左京区北白川追分町）

⑤ 清田正夫、竹田の不等式について、第 25 回有限群論草津セミナー、2013 年 8 月 4 日、草津セミナーハウス（群馬・吾妻郡草津町）

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山形 邦夫 (YAMAGATA, Kunio)
東京農工大学・大学院工学研究院・名誉教授

研究者番号：6 0 0 1 5 8 4 9

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

清田 正夫 (KIYITA, Masao)
東京医科歯科大学・教養部・教授

研究者番号：5 0 2 1 4 9 1 1