

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 7 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400037

研究課題名(和文) 多元環の表現論を応用した非可換代数幾何学の新展開

研究課題名(英文) New methods of study in noncommutative algebraic geometry using representation theory of algebras

研究代表者

毛利 出 (MORI, IZURU)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：50436903

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：非可換代数幾何学は代数(多元環)を代数幾何学の手法を用いて研究する比較的新しい研究分野であり、AS-regular代数や量子射影空間は非可換代数幾何学の重要な研究対象である。本研究課題の主な研究成果は、代数幾何学の手法だけでなく、高次無限表現型多元環の理論、superpotentialの理論、孤立特異点の理論といった多元環の表現論の手法を用いて、AS-regular代数や量子射影空間を研究・分類したことである。

研究成果の概要(英文)：Noncommutative algebraic geometry is a recently established research field, which studies algebras using tools from algebraic geometry. AS-regular algebras and quantum projective spaces are main objects of study in noncommutative algebraic geometry. The major achievement of this research project is that, by using tools not only from algebraic geometry, but also from representation theory of algebras, such as theory of  $n$ -representation infinite algebras, theory of superpotentials and theory of isolated singularities, we studied and classified AS-regular algebras and quantum projective spaces.

研究分野：数物系科学

キーワード：非可換代数幾何学 多元環の表現論 AS-regular代数 量子射影空間

## 1. 研究開始当初の背景

非可換代数幾何学は、約25年前にM. Artinらによって創設され、現在欧米を中心に活発に研究されている研究分野です。大雑把に言って、非可換代数幾何学とは非可換代数(多元環)を代数幾何学的手法を用いて研究しようとする環論の分野といえます。代数幾何学における重要な研究課題の一つは低次元代数多様体を分類することです。同様に非可換代数幾何学においても低次元非可換代数多様体を分類することが大変重要な研究課題となっています。実際非可換代数幾何学は量子射影平面の斉次座標環であるところの3次元AS-regular代数を分類したM. Artin, J. Tate, M. Van den Berghの論文[2]に始まり、非可換射影スキームの概念を定義し、その基本的性質を調べたM. Artin, J. J. Zhangの論文[3]によって確立されたといつてよいでしょう。その後非可換射影曲線はM. Artin, J. T. Stafford[1]によって分類が完成されたので、次なる目標は高次元量子射影空間や非可換射影曲面を分類することであり、現在まで活発に研究されています。研究代表者はこの分野が始まった約25年前からこの分野の研究に取り組んできた、いわばこの分野の草分けの研究者の一人であり、この分類問題に対しても、代数幾何学、可換環論、ホモロジー代数などを駆使して貢献してきました。最近は新しい展開として多元環の表現論を応用できないか模索してきましたが、平成24年度までの科研費研究課題において源氏との共同研究[5]で、非可換代数幾何学と多元環の表現論の分類問題の間に三角圏を介して密接な関係があることを示すことができましたので、本研究課題ではこの理論を軸として非可換代数幾何学に多元環の表現論を応用するという新しい切り口で研究課題を推し進めていきました。

## 2. 研究の目的

平成24年度までの科研費研究課題では、非可換代数幾何学における重要な研究対象であるAS-regular代数と多元環の表現論における重要な研究対象である高次無限表現型多元環(quasi-Fano代数)やpreprojective多元環の間に三角圏を介して密接な関係があることを示すことができました。本研究課題ではその結果を軸として、多元環の表現論を非可換代数幾何学に応用するという新しい研究方法でAS-regular代数や量子射影空間を研究・分類することを主要目的としました。また非可換代数幾何学を応用して多元環の表現論で重要な高次無限表現型多元環上の正則加群の解析を行うことも目的としました。

## 3. 研究の方法

この研究課題を成功させるためには、まずこの研究課題に関係する可能性のある知識・情報を幅広く収集することが重要でした。今回特に非可換代数幾何学や多元環の表現論の専門家を静岡大学に招聘し、知識・手法を多岐にわたって提供してもらい、それらの集積した知識をもとに、解決の糸口が見つかった研究課題から順次取り組み、成果を上げました。また必要な知識を持った専門家の研究機関を訪問するなどして、その手法をさらに深く習得しました。特に平成26年度前期には静岡大学の教員特別研修としてUniversity of Washingtonに長期滞在し、S. P. Smith教授と共同研究を行い研究成果をあげることができました。また順次得られた研究成果を国内外の研究集会で発表し、本研究課題に対する国際的評価を確認しながら、論文にまとめて出版しました。

#### 4. 研究成果

(1) 大局次元1の無限表現型代数の加群の構造は正則加群と呼ばれる加群によって特徴付けられることが知られており、tame 表現型の場合にはそれ上の正則加群の分類が完成しています。平成25年度の主な研究業績の一つは、大局次元が2のS型量子 Beilinson 代数上の正則加群を分類することに成功したことです。この研究成果は平成27年10月にメキシコのオアハカで開催された研究集会など国内外の研究集会で発表することができ、後に[4]として出版されました。また代数幾何学において直線束が豊富であるという概念は重要ですが、最近私は代数上の群作用が豊富であるという概念を定義しました。また代数幾何学において孤立特異点という概念は重要ですが、上山健太氏によって非可換次数付き孤立特異点という概念が定義されました。平成25年度のもう一つの主な研究業績は、上山氏との共同研究でこれら二つの概念が密接に関係していることを証明したことです。この研究成果は平成26年8月に上海で開催された研究集会など国内外の研究集会で発表することができ、後に[6]として数学の学術誌として大変評価の高い Trans. Amer. Math. Soc. に出版されました。

(2) 平成26年度前期は静岡大学の教員特別研修として University of Washington に長期滞在し、S. P. Smith 教授と共同研究を行いました。主な研究業績は、3次元 quadratic AS-regular 代数が Calabi-Yau であるときは、ある potential の Jacobi 代数としてかけることが知られていますが、今回 S.P. Smith 氏との共同研究でそれらの potential を完全に分類することに成功したことです。この研究成果は[9]として数学の学術誌に投稿中です。さらに一般次元の

m-Koszul AS-regular 代数は twisted superpotential の derivation quotient 代数として表せることが知られていますが、S. P. Smith との共同研究でそれらの twisted superpotential を用いて、今まで計算が困難とされてきた homological determinant を容易に計算する方法を確立し、非可換不変式論に貢献しました。この研究成果は後に[8]として出版されました。

(3) 平成27年度の主な研究業績は、上山氏との共同研究で、AS-regular 代数の有限群による不変式環が Gorenstein, Koszul かつ孤立特異点を持つ場合、それ上の極大 Cohen-Macaulay 加群の圏の安定圏は tilting object を持ち、よってある有限次元多元環の導来圏と三角圏として同値になることを示したことです。この研究成果は7月にカナダの Fields Institute で開催された研究集会など国内外の研究集会で発表することができました。(またこの研究成果は本研究課題研究期間終了後に[7]として数学の学術誌のなかで最も評価の高い学術誌の一つ Adv. Math. に出版されました。)

#### 引用文献

- [1] M. Artin and J. T. Stafford, "Noncommutative graded domains with quadratic growth", Invent. Math. 122 (1995), 231-276.
- [2] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, "Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves", The Grothendieck Festschrift 1, Birkhauser (1990), 33-85.
- [3] M. Artin and J. J. Zhang, "Noncommutative projective schemes", Adv. Math. 109 (1994), 228-287.
- [4] I. Mori, "Regular modules over 2-dimensional quantum Beilinson algebras

of type S” , Math. Z. 279 (2015), 1143-1174

[5] H. Minamoto and I. Mori, “The structure of AS-Gorenstein algebras” , Adv. Math. 226 (2011), 4061-4095.

[6] I. Mori and K. Ueyama, “ Ample group action on AS-regular algebras and noncommutative graded isolated singularities” , Trans. Amer. Math. Soc., 368 (2016), 7359-7383

[7] I. Mori and K. Ueyama, “ Stable categories of graded maximal Cohen-Macaulay modules over noncommutative quotient singularities” , Adv. Math. 297 (2016), 54-92

[8] I. Mori and S. P. Smith, “ m-Koszul Artin-Schelter regular algebras” , J. Algebra, 446 (2016), 373-399

[9] I. Mori and S. P. Smith, “ The classification of 3-Calabi-Yau algebras with 3 generators and 3 quadratic relations” , preprint.

## 5 . 主な発表論文等

( 研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線 )

[ 雑誌論文 ] ( 計 8 件 )

Izuru Mori and Kenta Ueyama

“ Ample Group Action on AS-regular Algebras and Noncommutative Graded Isolated Singularities ”

*Trans. Amer. Math. Soc.*, **368**, 7359-7383 (2016) 査読有

DOI:10.1090/trans/6580

Izuru Mori and S. Paul Smith

“ m-Koszul Artin-Schelter Regular Algebras ” ,

*J. Algebra*, **446**, 373-399 (2016) 査読有

DOI:10.1016/j.jalgebra.2015.09.016

Izuru Mori

“ 2-dimensional Quantum Beilinson Algebras ”

Proceedings of the 48th Symposium on Ring Theory and Representation Theory (Aichi, 2015), 103-106 (2016) 査読無

Izuru Mori and Kenta Ueyama

“ Tilting Objects for Noncommutative Quotient Singularities ”

Proceedings of the 48th Symposium on Ring Theory and Representation Theory (Aichi, 2015), 107-113 (2016) 査読無

Izuru Mori

“ Regular Modules over 2-dimensional Quantum Beilinson Algebras of Type S ”

*Math. Z.* 279, 1143-1174 (2015) 査読有  
DOI:10.1007/s00209-015-1407-x

Izuru Mori

“ Jacobian Algebras and Deformation Quantizations ”

Proceedings of the 47th Symposium on Ring Theory and Representation Theory (Osaka, 2014), 123-129 (2015) 査読無

Izuru Mori

“ B-construction and C-construction ”

*Comm. Algebra*, 41, 2071-2091 (2013) 査読有

DOI:10.1080/00927872.2011.653463

Izuru Mori

“ McKay Type Correspondence for AS-regular Algebras ”

*J. London Math. Soc.*, 88, 97-117 (2013) 査読有

DOI:10.1112/jlms/jdt005

[学会発表](計 9 件)

Izuru Mori

“ Introduction to Noncommutative Algebraic Geometry ”

「若人のための現代幾何入門」東京大学、東京都目黒区、2015 年 11 月 7・8 日 (招待講演)

Izuru Mori

“ n-regular Modules over n-representation Infinite Algebras ”

BIRS workshop “ Preprojective algebras interacting with singularities, Cohen-Macaulay modules and weighted projective spaces ”, Oaxaca, Mexico、2015 年 10 月 6 日 (招待講演)

Izuru Mori

“ 2-dimensional Quantum Beilinson Algebras ”

第 48 回環論および表現論シンポジウム、名古屋大学、愛知県名古屋市、2015 年 9 月 7 日

Izuru Mori

“ Stable Categories of Graded Maximal Cohen-Macaulay Modules over Noncommutative Quotient Singularities ”

Workshop on geometric algebra: bridges between commutative algebra, noncommutative geometry and representation theory, Fields Institute, Toronto, Canada、2015 年 7 月 7 日 (招待講演)

Izuru Mori

“ 3-dimensional Calabi-Yau algebras and Deformation Quantizations ”

第 47 回環論および表現論シンポジウム、大阪市立大学、大阪府大阪市、2014 年 9 月 13 日

Izuru Mori

“ McKay Correspondence and Beilinson Correspondence for AS-regular Algebras ” Noncommutative Algebraic Geometry Shanghai Workshop 2014, Fudan University, Shanghai, China、2014 年 8 月 25 日 (招待講演)

Izuru Mori and Kenta Ueyama

“ Ample Group Action and Isolated Singularity ” Regularity and Rigidity of Noncommutative Algebras Seattle Workshop 2014, University of Washington, Seattle, U.S.A. 2014 年 3 月 23 日 (招待講演)

Izuru Mori

“ A Moduli Space of Regular Modules over some Fano Algebras ”

RIMS 研究集会「代数幾何学と可積分系におけるモジュライ理論」、京都大学数理解析研究所、京都府京都市、2013 年 9 月 19 日 (招待講演)

Izuru Mori

“ Ample Group Action on AS-regular Algebras ”

RIMS 研究集会「非可換代数幾何学とその周辺」、京都大学数理解析研究所、京都府京都市、2013 年 7 月 2 日 (招待講演)

6 . 研究組織

(1)研究代表者

毛利 出(MORI IZURU)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号 : 50436903

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし