様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号： １３２０１
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2013～2015
課題番号： ２５４０００４０

研究課題名（和文） 一般化された量子群と関係する代数系の表現論について

研究課題名（英文） On representation theory of generalized quantum groups and algebras related to them

研究代表者
山根　宏之（Yamane, Hiroyuki）

富山大学・大学院理工学研究部(理学)・教授

研究者番号：１０２３０５１７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：一般化された量子群の有限次元既約表現の分類の結果を書いた論文が受理され出版された。カッツのA-G型単純スーパーリー代数の有限次元既約表現の分類のリストの別証明を与えた。全ての有限次元既約表現が最高ウエイト表現である事が分かった。一般化されたルート系の新しい簡単な定義を与えた。この定義よりA-G型単純スーパーリー代数のルート系が一般化されたルート系である事が簡単に分かるようになった。

研究成果の概要（英文）：The article giving the classification of the finite dimensional irreducible representaions of the generalized root system was published. New proof of the Kac's list of the classification the finite dimensional irreducible representaions of the A-G type simmple Lie superalgebras was given. It was proved that any finite dimensional irreducible representaion has a highest weight vector. New and easier definition of the generalizeed root systems was given. Then it became easily seen that the root system of any A-G type simmple Lie superalgebra is a generalized root system.

研究分野： 代数学

キーワード： 量子群　スーパーリー代数　コクセター群　ワイル亜群　一般化された量子群　一般化されたルート系

１．研究開始当初の背景

１９８５年頃にドリンフェルドと神保により量子群が発見された。それはセール関係式と呼ばれる単純な定義関係式により定義されていた。１９８９年に山根はA型量子群のＰＢW型定理を提出した。山根は１９９１年頃にＡ－Ｇ型単純スーパーリー代数に付随する量子群の定義関係式を求めた。山根が与えた定義関係式はＡ－Ｇ型単純スーパーリー代数に対しても新しいものであった。しかしそれがあまりにも複雑であるために定義関係式を用いない統一的な定義を与えた。山根は１９９９年頃にアフィンスーパーリー代数に付随する量子群の定義関係式を求めた。２００３年頃に楕円リー代数の定義関係式を求めた。ヘッケンバーガーとの２００６年頃の共同研究で一般されたルート系とワイル亜群を研究した。とくにワイル亜群に対してコクセター関係式が定義関係式である事を示し、松本型の定理を提出し、ホップ代数の分類理論に著しい貢献をした。さらに２０１０年頃の共同研究で一般化された量子群のシャポバロフ行列式の因数分解公式を提出した。その公式はヤンツェンフィルトレーションによるもにではなく１のべき根で定義された一般化された量子群の有限次元ヴァーマ加群を調べてその特異ベクトル空間を調べる事により得られた。２００８年頃に山根は物理学者を共著者として含むアフィンD（２，１；x）型スーパーリー代数のドリンフェルド第２実現に関する論文を書いた。D（２，１；x）のx→－１での極限はｓｌ（２｜２）の中心拡大となっておりその方面の研究は AdS/CFT 理論に役立つ事が期待されている。

２０１２年には一般化された量子群の有限次元既約表現の分類については既に完成されていたが共著論文にまとめたところ専門外の研究者には読みにくいところあるとの指摘があり全面的に論文を書き直し始めた。一般化された量子群のハリス・チャンドラ理論もほぼ完成して共著論文を書き始めた。

２．　　研究の目的

一般化されたルート系をより詳しく研究して一般化された量子群の表現論を研究するのが目的である。ハリシュ・チャンドラ理論を提出しその応用としてある種の有限次元既約表現のカッツ・ワイル型の指標公式を提出するのが目的である。

３．研究の方法

後述の学会発表にもあるように国内外の数多くの研究集会で研究発表をして多くの研究者と研究交流を行った。連携研究者とは私的な勉強会を数多く行って互いの重要な研究課題に対して認識を深めた。

４．研究成果

(1)$\mathbb{N}=\{1, 2, \ldots\}$を整数全体のなす集合とする。$\mathbb{Z}=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$を整数全体のなす集合とする。$\mathbb{Z}_+=\{0, 1, 2, \ldots\}$を非負整数全体のなす集合とする。$\mathbb{R}$を実数全体のなす集合とする。当該研究の中で次の補題１を定式化し証明する事が出来た。「補題１：Vを$\{0\}$でない有限次元実ベクトル空間とする。nをVの次元とする。AをV内の階数がnである$\mathbb{Z}$自由加群である。Rを$\mathbb{Z}$加群としてAを生成するAの部分集合とする。$\{a_1, \ldots, a_n\}$をAの$\mathbb{Z}$基とする。このとき線形写像$g : V \to \mathbb{R}$で$|g(a_1)| < |g(x)|$ $(x \in R - \{0, a_1, -a_1\})$を満たすものが存在する。」BをAの$\mathbb{Z}$基とする。$\mathbb{Z}_+B$を非負係数のBの１次結合でかけるAの元の集合とする。RをAの空でない部分集合とする。Rの部分集合BがRの基であるとは次の（B１）～（B３）を満たすときにいう。（B１）BがAの$\mathbb{Z}$基である。（B２）$R_+B = R \cap (\mathbb{Z}_+B)$とおいたとき$R = R_+B \cup (-R_+B)$が成り立つ。（B３）各$a \in B$に対して$\mathbb{Z}a \cap R = \{a, -a\}$が成り立つ。$\underset{\sim}{\mathcal{B}}$をRの基全体からなる集合とする。$\mathcal{B}$を$\underset{\sim}{\mathcal{B}}$の空でない集合とする。組$(R, \mathcal{B})$が一般化されたルート系であるとは、各$B \in \mathcal{B}$および各$a \in B$に対して$\underline{B} \in \mathcal{B}$があって$R_+\underline{B} \cap (-R_+B) = \{-a\}$が成り立つときにいう。補題１より次の定理２を得た。「定理２：$(R, \mathcal{B})$を一般化されたルート系でRが有限集合であるものとする。このとき$\mathcal{B} = \underset{\sim}{\mathcal{B}}$が成り立つ。$a \in R$に対して$a \in B$となる$B \in \mathcal{B}$がある。$a \in A - R$に対して$a \in A - (\mathbb{Z}_+B \cup (-\mathbb{Z}_+B))$となる$B \in \mathcal{B}$がある。」定理２により研究代表者が１９９０年代に得たA-G型の単純スーパーリー代数の定義関係式を記述する統一的な証明が得られた。研究代表者が１９９０年代に行った研究では一般化されたルート系の概念はまだなかったがそのときには単純スーパーリー代数のルート系を単純リー代数のルート系の部分集合とみなしワイル群の作用を用いて定義関係式を見つけた。アフィンスーパーリー代数の定義関係式も研究代表者が１９９０年代に見つけたが補題１をアフィンの場合に合わせて変形する事が出来て統一的な証明が得られた。

(2)Aを上記のものとする。$I = \{1, 2, \ldots, n\}$とおく。$(R, \mathcal{B})$をA内の一般化されたルート系とする。$\underline{\mathcal{B}}$をIからRへの写像$b : I \to R$で$b(I) \in \mathcal{B}$を満たすもの全体からなる集合とする。$b \in \underline{\mathcal{B}}$および$i \in I$に対して$N_{b,i} \in \mathbb{Z}$を$\{b(j) + N_{b,i}b(i) \mid j \in I\} \in \mathcal{B}$により定義し$b^{(i)} \in \underline{\mathcal{B}}$を$b^{(i)}(j) = b(j) + N_{b,i}b(i)$により定義する。$\underline{V}$をVとは別のn次元実ベクトル空間とする。$\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$をVの基底とする。$b \in \underline{\mathcal{B}}$および$i \in I$に対して$s^b{}_i \in GL(\underline{V})$を$s^b{}_i(\underline{a}_j) = \underline{a}_j + N_{b,i}\underline{a}_i$により定義する。$\mathcal{M}$を$\mathbb{N}$からIへの写像$f : \mathbb{N} \to I$全体からなる集合とする。$f \in \mathcal{M}$および$t \in \mathbb{N}$に対して$b_{f,t} \in \underline{\mathcal{B}}$および$1^bs_{f,t} \in GL(\underline{V})$を$t = 0$のときは$b_{f,0} = b$および$1^bs_{f,0} \in GL$

($\underline{V}$)は恒等写像とする事により定義し$t \geqq 1$のときは帰納的に$c = b_{f,t-1}$とおいて$b_{f,t} = c^{(t)}$および$1^b s_{f,t-1} \circ s^c{}_t$により定義する。「補題２：$d_{ij} \in \mathbb{Z}$を$(1^b s_{f,t})(\underline{a}_j) = d_{1j}\underline{a}_1 + \cdots + d_{nj}\underline{a}_n$により定義する。このとき$b_{f,t}(j) = d_{1j}b(1) + \cdots + d_{nj}b(n)$が成り立つ。」２００８年に山根が共著論文で得られた結果により次の定理３を得る。「定理３：$c = b_{f,t}$および$w = 1^b s_{f,t}$とする。kを$w = 1^b s_{g,k}$となる$g \in \mathcal{M}$が存在する最小の非負整数とする。$k = |R_+ c(I) \cap (-R_+ b(I))|$が成り立つ。」補題２より一般化されたルート系は２０１５年に山根が共著論文で与えたそれと同等である事がわかり、その論文では２００８年に山根が共著論文与えた一般化されたルート系の定義と同等である事が示された。その事により定理３を得られた。Rが有限集合であるとき$b \in \underline{\mathcal{B}}$に対して$f \in \mathcal{M}$および$t \in \mathbb{N}$に対して$b_{f,t}(I) = -b(I)$となるとき$1^b s_{f,t}$を$b$を終点とする最長元とよぶ。$k = |R_+ b(I)|$であり$1^b s_{f,k}$が最長元であるとき$R_+ b(I) = \{b_{f,t-1}(t) \mid 1 \leqq t \leqq k\}$が成り立つ。

(3) Aを有限生成アーベル群とする。$\underline{K}$を標数０の代数閉体とする。$\chi : A \times A \to \underline{K} - \{0\}$を$\chi(a, b+c) = \chi(a, b)\chi(a, c)$, $\chi(a+b, c) = \chi(a, c)\chi(b, c)$を満たす任意の写像とする。$\chi$および$A$の基$\{a_i \mid i \in I\}$に対してドリンフェルドの２重構成法の考え方で一般化された量子群$U(\chi)$を構成する事が出来る。$U(\chi)$に対してＰＢＷ型基底を記述するカルチェンコ型ルート系$R(\chi)$が定義できる。有限集合である$R(\chi)$はヘッケンバーガーにより分類されている。$R(\chi)$が有限集合であれば一般化されたルート系である。当該研究では$U(\chi)$の有限次元既約表現の表現空間が最高ウエイトベクトルを持つ事を示した。さらに有限次元既約表現の最高ウエイトを分類した。K_i, L_i $(i \in I)$を$U(\chi)$のカルタン部分の生成元とする。$\mathcal{L}(\Lambda)$をΛを最高ウエイトとする$U(\chi)$の既約加群とする。$\Lambda_i := \Lambda(K_i L_i^{-1})$とおく。$\chi_{i,j} := \chi(a_i, a_i)$とおく。$q \in \underline{K}$を０でなく１のべき根でもないものとする。$[a_{ij}]_{ij \in I}$を複素単純リー代数のカルタン行列とする。$d_i \in \mathbb{N}$を$[d_i a_{ij}]$が対称行列であるものとする。$\chi$を$\chi_{i,j}$が$q$の$d_i a_{ij}$乗であるものとする。このとき$\mathcal{L}(\Lambda)$が有限次元である為の必要十分条件は全ての$i \in I$に対して$\Lambda_i$が$\chi_{i,i}$の非負整数べき乗であることである。$\chi$を$A(m, n-m-1)$型複素単純スーパーリー代数に対応するものとする。すなわち$\chi_{i,i} = q$ $(1 \leqq i \leqq m)$, $\chi_{m+1,m+1} = -1$, $\chi_{i,i} = q^{-1}$ $(m+2 \leqq i \leqq n)$, $\chi_{i,i+1}\chi_{i+1,i} = q^{-1}$ $(1 \leqq i \leqq m)$, $\chi_{i,i+1}\chi_{i+1,i} = q$ $(m+1 \leqq i \leqq n-1)$, $\chi_{i,j}\chi_{j,i} = 1$ $(|i-j| \geqq 2)$を満たすものとする。このとき$\mathcal{L}(\Lambda)$が有限次元である為の必要十分条件は全ての$i \in I - \{m+1\}$に対してΛ_iが$\chi(a_i, a_i)$の非負整数べき乗であることである。これ以外は複雑な条件が必要となる。例えばχを$D(m, n-m)$型複素単純スーパーリー代数に対応するものとする。とくに$\chi_{1,1} = q$, $\chi_{m,m} = -1$, $\chi_{n,n} = q^{-1}$とする。$G := (\Lambda_{n-m} \cdots \Lambda_{n-2})^2 \Lambda_{n-1}\Lambda_n$とおく。このとき$\mathcal{L}(\Lambda)$が有限次元である為の必要十分条件は次の(a)－(d)が成り立つ事である。(a)全ての$i \in I - \{n-m\}$に対してΛ_iが$\chi_{i,i}$の非負整数べき乗である。(b) Gはq^2の非負整数べき乗である。(c)ある０以上$m-2$以下の整数kがあって$G = q^{2k}$であるならば$\Lambda_{n-m} \cdots \Lambda_{n-m+k} = q^k$であり$\Lambda_{n-m+k+1} = \cdots = \Lambda_n = 1$である。(d) $G = q^{2(m-1)}$であるならば$\Lambda_{n-m} \cdots \Lambda_{n-1} = q^{m-1}$である。

(4) $U(\chi)$のハリシュ・チャンドラ理論に対する共著のプレプリントを書いた。（preprint, arXiv:1309.1651）

(5) $U(\chi)$の普遍R行列を導いた共著論文を出版した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５　件）

Punita Batra and Hiroyuki Yamane, Skew centers of rank-one generalized quantum groups, Toyama Mathematical Journal, Volume 37 (2015), 189-202 , http://www.sci.u-toyama.ac.jp/math/tmj/archive/tmj37_2015/tmj_37_2015_10.pdf 査読有り

Hiroyuki Yamane, Generalized root systems and the affine Lie superalgebra G^(1)(3), São Paulo Journal of Mathematical Sciences, (September 09 2015) DOI 10.1007/s40863-015-0021-5, June 2016, Volume 10, Issue 1, pp 9-19　査読有り

Saeid Azam, Hiroyuki Yamane, Malihe Yousofzadeh, Classification of Finite Dimensional Irreducible Representations of Generalized Quantum Groups via Weyl Groupoids, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 51 (2015), no. 1, 59-130.DOI:１０．４１７１/PRIMS/１４９　査読有り

Ivan Angiono, Hiroyuki Yamane, The R-matrix of quantum doubles of Nichols algebras of diagonal type, J. Math. Phys. 56, 021702 (2015) http:dx.doi.org/10.1063/1.4907379　査読

有り

Hiroyuki Yamane, Exposition on classification of finite dimensional irreducible representations of the Lie superalgebra $B(m, n)$, XXII International Conference on Integrable Systems and Quantum Symmetries (ISQS-22), Journal of Physics: Conference Series 563 (2014) 012035
doi:10.1088/1742-6596/563/1/012035 査読有り

〔学会発表〕（計２５件）

①山根 宏之 Weyl groupoids, generalized root system and representation theory of generalized quantum groups, ワルシャワ大学数学教室代数セミナー２０１６年３月３１日 ポーランド（ワルシャワ）

②山根 宏之 Weyl groupoids and representation theory of generalized quantum groups, 日本数学会 2016 年度年会無限可積分系セッション特別講演，２０１６年３月１９日 筑波大学（茨城県・つくば市）

③山根 宏之 An exposition on several concepts on theory of differential fields, 米国ミルウォーキー大学数学教室代数セミナー，２０１５年１１月３日 米国（ミルウォーキー）

④山根 宏之 Skew Centers of Generalized Quantum Algebras, 米国ホワイトウォーター大学数学教室談話会，２０１５年１０月２６日 米国（ホワイトウォーター）

⑤山根 宏之 Centers of generalized quantum algebras, 米国ウィスコンシン大学数学教室 Combinatorics Seminar，２０１５年１０月２６日 米国（マディソン）

⑥山根 宏之 一般化された量子群の中心元のカッツ構成について，２０１５年度表現論シンポジウム ２０１５年１１月１９日 公共の宿おおとり荘（静岡県・伊豆の国市）

⑦山根 宏之 Exposition on differential fields, Tsukuba Mini-Conference on Hopf Algebras and Differential Galois Theory ２０１５年９月１５日 筑波大学（茨城県・つくば市）

⑧山根 宏之 量子群の中心のカッツ構成 第３１回リー代数サマーセミナー ２０１５年８月２９日 新潟薬科大学（新潟県・新潟市）

⑨山根 宏之 Coxeter groups and Weyl groupoids I-VI（６回連続講演）， Isfahan IPM-Branch Worckshop，２０１５年６月 13－１５日 イラン（イスファハン）

⑩山根 宏之, Generalized Quantum groups and their representation theory,Algebraic Lie theory and Representation theory ALTReT 2015，２０１５年６月７日 岡山いこいの村（岡山県・瀬戸内市）

⑪山根 宏之 Application of Weyl groupoids to Representation theory quantum affine Lie superalgebras, Mini-workshop on Hopf algebras and representation theory,２０１４年１２月２８日 中国（南京）

⑫山根 宏之 Defining relations of quantum affine Lie superalgebras, 揚州大学数学教室談話会２０１４年１２月３１日 中国（揚州）

⑬山根 宏之 Representation theory of generalized quantum groups, Conference on “Infinite Dimensional Lie Theory and its Applications”(15-20 December, 2014),２０１４年１２月１７日 インド（アラハバード）

⑭山根 宏之 Representation theory of generalized quantum groups via Weyl groupoids, Search for Classical Analysis and Quantum Integrable Systems, 15-17 November 2014, Kyoto University, Japan, ２０１４年11 月１６日 京都大学（京都府・京都市）

⑮山根 宏之 Centers of generalized quantum groups, TSUKUBA WORKSHOP ON INFINITE-DIMENSIONAL LIE THEORY AND RELATED TOPICS ２０１４年１０月２２日 筑波大学（茨城県・つくば市）

⑯山根 宏之 Harish-Chandra-Type Theorem of Generalized Quantum Groups 米国ミルウォーキー大学数学教室代数セミナー ２０１４年９月９日 米国（ミルウォーキー）

⑰山根 宏之 Generalized Quantum Groups and Weyl groupoids, International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (ISQS) June 23 - June 29, 2014, ２０１４年６月２５日 チェコ（プラハ）

⑱山根 宏之 Rosso's Construction of Central Elements,ドイツ・マールブルク大学・数学教室 Oberseminar "Kombinatorik und

Algebra" ２０１４年6月２０日　ドイツ（マールブルク）

⑲山根 宏之　Harish-Chandra-type theorem of generalized quantum groups　第10回駒場幾何学的表現論と量子可積分系のセミナー　２０１４年5月１０日　東京大学大学院数理科学研究科（東京都・目黒区）

⑳山根 宏之　Irreducible representations of generalized quantized algebras　２０１４年度日本数学会春季年会　２０１４年3月１７日　学習院大学（東京都・豊島区）

㉑山根 宏之　コクセター亜群と表現論　岐阜大学工学部数学教室セミナー　２０１４年2月２１日　岐阜大学工学部（岐阜県・岐阜市）

㉒山根 宏之　一般化された量子群の中心　大阪市立大学数学研究所代数セミナー　２０１３年１０月２２日　大阪市立大学数学研究所（大阪府・大阪市）

㉓山根 宏之　Skew center of a generalized quantized algebra　アルゼンチン・コルドバ大学リー理論セミナー　２０１３年9月５日　アルゼンチン（コルドバ）

㉔山根 宏之　コクセター亜群の松本の定理と一般化された量子群のシャポバロフ行列式　慶應義塾大学理工学部微分幾何・トポロジーセミナー　２０１３年6月２４日慶應義塾大学理工学部（神奈川県・横浜市）

㉕山根 宏之　Universal R-matrix of a generalized quantum group　第16回代数群と量子群の表現論（RAQ2013）２０１３年６月６日強羅青雲荘（神奈川県・箱根町）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

山根　宏之（ＹＡＭＡＮＥ, Hiroyuki）
富山大学・大学院理工学研究部（理学）・教授
研究者番号：１０２３０５１７

(2)連携研究者

吉井　洋二（ＹＯＳＨＩＩ,Yoji）
岩手大学・教育学部・教授
研究者番号：９０４６２１２６

伊藤　健（ＩＴＯ,Ken）
愛知工業大学・工学部・教授
研究者番号：７０４１０５８７

大島　和幸（ＯＳＨＩＭＡ,Kazuyuki）
愛知工業大学・工学部・准教授
研究者番号：３０５４７９８０７