

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 15 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400042

研究課題名(和文) 計算機によるK3曲面の研究

研究課題名(英文) Computational study of K3 surfaces

研究代表者

島田 伊知朗 (Shimada, Ichiro)

広島大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：10235616

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：計算機に実装した格子に対するアルゴリズムを用いて、K3曲面および関連する代数多様体のいくつかの幾何学的帰結を導いた。(1)一般化されたBorcherds-Kondoの方法により、いくつかの特異K3曲面の自己同型群の有限生成系を求めた。(2)標数5におけるArtin不変量が1の超特異K3曲面の興味深い射影モデルをいくつか求めた。(桂利行、金銅誠之との共同研究)(3)実験により超特異K3曲面は常に既約Salem型の自己同型をもつという予想を提出した。(4)Fermat多様体の部分線形空間の位相クラスにより生成される部分加群の組合せ論的記述を与えた。(A. Degtyarevとの共同研究)

研究成果の概要(英文)：By means of computer-aided calculations of lattices, we obtained many geometric consequences on K3 surfaces and related algebraic varieties. (1) We determined finite sets of generators of automorphism groups of several singular K3 surfaces by generalized Borcherds-Kondo method. (2) We obtained three interesting projective models of the supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 5 (joint work with T.Katsura and S.Kondo). This result led us to a new construction of the Hoffman-Singleton graph and the Higman-Sims graph. (3) By an experimental computation, we presented a conjecture that each supersingular K3 surface in odd characteristic has an automorphism whose characteristic polynomial on the Neron-Severi lattice is an irreducible Salem polynomial. (4) We presented a combinatorial description of the submodule of the middle homology group of an even dimensional complex Fermat variety generated by the classes of linear subspaces (joint work with A. Degtyarev).

研究分野：代数幾何学

キーワード：K3曲面 計算機アルゴリズム 格子 自己同型 射影モデル

1. 研究開始当初の背景

K3 曲面は、楕円曲線の 2 次元における自然な拡張であり、代数幾何学における最も重要な研究対象のひとつである。近年においても、Maulik らにより正標数の K3 曲面に対する Artin 予想が証明され、また Liedke により超特異 K3 曲面の単有理性が証明されるなど大きなブレイク・スルーが occurring。さらに、一般次元の代数多様体に対する様々な理論を確立する際の実験場としても K3 曲面は重要な役割を果たしている。

しかし、楕円曲線と比べ、K3 曲面ははるかに複雑であり、その理論はいろいろな点で未完成である。例えば、代数閉体上の楕円曲線の自己同型群は完全に決定されているのに対し、自己同型群の決定されている K3 曲面のクラスは限定されたものととどまる。

2. 研究の目的

本研究の目的は、K3 曲面に関する様々な問題、特に自己同型群の決定、ネロン・セヴェリ格子への自己同型群の作用の基本領域の決定、および明示的な射影モデルの研究、における計算機使用のための技法を確立し、計算機を大規模に用いることによって、K3 曲面の理論を精緻化することである。

3. 研究の方法

K3 曲面のあるクラスに関する諸問題に対し、理論的研究から要請される汎用性の高い計算機アルゴリズムを抽出し、そのアルゴリズムを高速に実行するプログラムを計算機に実装する。さらに具体例に対して計算を実行し、データから幾何学的帰結を導出する。これらの計算機アルゴリズムを他の代数多様体にも適用する。

代数幾何学・位相幾何学の研究集會に出席する、研究集會を開催する、あるいは研究者をセミナーに招待する、などの方法により、どのような計算機アルゴリズムが必要とされているのかについての情報を収集する。

検証可能性を保証するために、詳細な計算データを研究代表者の web page において公開する。

4. 研究成果

(1) K3 曲面の自己同型群の有限生成系をネロン・セヴェリ格子への作用として書き下す Borchers-Kondo の方法を一般化し、さらに計算機アルゴリズムの形に定式化して、計算機に実装した。その結果、従来の方法では取り扱えなかった特異 K3 曲面、すなわち超越格子のグラム行列がそれぞれ $[[2, 1], [1, 6]]$ 、 $[[4, 1], [1, 4]]$ および $[[2, 0], [0, 8]]$ となる 3 つの特異 K3 曲面に対して、その自己同型群の有限生成系を書き下すことに成功し

た。また、従来の Borchers-Kondo の方法が適用できる特異 K3 曲面に対しては、きわめて短時間で計算結果を得ることができることを確認した。特に、超越格子のグラム行列がそれぞれ $[[2, 1], [1, 8]]$ 、 $[[2, 0], [0, 12]]$ および $[[6, 0], [0, 6]]$ となる 3 つの特異 K3 曲面には 6 次の交代群が作用するが、その自己同型群の有限生成系を求めた。このうち、超越格子が $[[6, 0], [0, 6]]$ の特異 K3 曲面を普遍被覆としてもつエンリケス曲面には有限群 M_{10} が作用するが、この作用を明示的に書き下すことができた。

(2) 一般化された Borchers-Kondo の方法を標数 5 でアルティン不変量が 1 の超特異 K3 曲面に適用することにより、この曲面の射影モデルで巨大な射影的自己同型群を持つものを 3 つ構成し、その幾何学的性質と相互の関連を調べた。特に、6 個の (16)₆ 型配置をなす 96 本の有理曲線を、この K3 曲面のクンマー曲面モデル上に明示的に構成した。(桂利行、金銅誠之との共同研究)。

この射影モデルの研究の過程において、重要な強正則グラフである Hoffman-Singleton グラフおよび Higman-Sims グラフを、標数 5 における 6 次フェルマー曲線の代数幾何学的性質を用いて構成することに成功した。

また、Ballico-Hefez 曲線との関連をしらべ、標数 3 および 5 におけるアルティン不変量が 1 の超特異 K3 曲面は、Ballico-Hefez 曲線を分岐曲線とする射影平面の巡回被覆として得られることを示した。(Hoang Thanh Hoai との共同研究)。

(3) 標数が奇素数の代数閉体上で定義された超特異 K3 曲面において、射影平面の 2 重被覆の Galois 群となる involution を多数生成する方法を開発した。これらの involutions をランダムに合成することにより、標数が 7919 (1000 番目の素数) 以下の奇素数ならば、任意の超特異 K3 曲面は、ネロン・セヴェリ格子への作用の特性多項式が既約な Salem 多項式となる自己同型をもつことを示した。Artin 不変量が 10 の超特異 K3 曲面に関しては、2000 番目の素数までこの現象を確かめた。

(4) 偶数次元の複素 Fermat 多様体の中間次元の整数係数ホモロジー群において、線形部分空間のクラスの生成する部分加群の組合せ論的記述を与えた。この部分加群は primitive であることが予想される。正標数への還元とグレブナー基底を用いて、この primitivity を検証する技法を開発し、いくつかの場合に適用した。(Alex Degtyarev との共同研究)。

(5) 毎年 3 月に、国際研究集會 “Branched coverings, degenerations, and related topics” を開催し、位相幾何学と代数幾何学の接点にある諸問題について、情報の交換を

促した .

(6) 研究分担者の高橋宣能は, カンドル演算を持つ代数多様体について研究し, 特に, 標数 0 で正規, 代数的に連結な場合の構造定理を得た. また, 数論的スキームのガロア被覆に付随するカンドルを定め, カンドルからのスキームの復元について研究した .

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 25 件)

1. Alex Degtyarev and Ichiro Shimada, On the topology of projective subspaces in complex Fermat varieties, accepted by J. Math. Soc. Japan. 査読あり .
2016, in press.

<http://arxiv.org/abs/1405.4683>

2. Ichiro Shimada, The automorphism groups of certain singular K3 surfaces and an Enriques surface, accepted by the proceedings of the conference on “K3 surfaces and their moduli” . 査読あり .
2016, in press.

<http://arxiv.org/abs/1412.6904>

3. Ichiro Shimada, Automorphisms of supersingular K3 surfaces and Salem polynomials, Experimental Math., 25, 2016, 389-398. 査読あり,
doi: 10.1080/10586458.2015.1073641

4. Toshiro Hiranouchi, Milnor K-groups attached to elliptic curves over a p-adic field, Funct. Approx. Comment. Math., 54, 2016, 39-55, 査読あり .
doi: 10.7169/facm/2016.54.1.4

5. Akira Ishii and Ueda Kazushi, Dimer models and the special McKay correspondence, Geom. Topol. 19, 2015, 3405-3466, 査読あり ,
doi: 10.2140/gt.2015.19.3405

6. Ichiro Shimada, An algorithm to compute automorphism groups of K3 surfaces and an application to singular K3 surfaces, Int Math Res Notices (2015), 査読あり .
doi: 10.1093/imrn/rnv006

7. Thanh Hoai Hoang and Ichiro Shimada, On Ballico-Hefez curves and associated supersingular surfaces. Kodai Math. J. 38 (2015), no. 1, 23-36. 査読あり .
http://projecteuclid.org/download/pdf_1

[/euclid.kmj/1426684441](http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.kmj/1426684441)

8. Ichiro Shimada and De-Qi Zhang , Dynkin diagrams of rank 20 on supersingular K3 surfaces. Sci. China Math. 58 (2015), no. 3, 543-552. 査読あり .
doi: 10.1007/s11425-014-4902-3

9. Akira Ishii and Kazushi Ueda, The special McKay correspondence and exceptional collections. Tohoku Math. J. (2) 67 (2015), no. 4, 585-609. 査読あり .
https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.tmj/1450798075

10. Toshiyuki Katsura, Shigeyuki Kondo and Ichiro Shimada, On the supersingular K3 surface in characteristic 5 with Artin invariant 1. Michigan Math. J. 63 (2014), no. 4, 803-844. 査読あり .

<https://projecteuclid.org/euclid.mmj/1417799227>

11. Shigeyuki Kondo and Ichiro Shimada, On a certain duality of Néron-Severi lattices of supersingular K3 surfaces. Algebr. Geom. 1 (2014), no. 3, 311-333.
査読あり . doi:10.14231/AG-2014-016

12. Ichiro Shimada, The graphs of Hoffman-Singleton, Higman-Sims and McLaughlin, and the Hermitian curve of degree 6 in characteristic 5. Australas. J. Combin. 59 (2014), 161-181. 査読あり .
http://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/59/ajc_v59_p161.pdf

13. Shunichi Kimura, Shigeru Kuroda and Nobuyoshi Takahashi, The closed cone of a rational series is rational polyhedral. J. Algebra 405 (2014), 243-258. 査読あり .
doi:10.1016/j.jalgebra.2014.02.007

14. Toshiro Hiranouchi, An additive variant of Somekawa's K-groups and Kähler differentials. J. K-Theory 13 (2014), no. 3, 481-516. 査読あり .
doi: 10.1017/is014003007jkt257

15. Toshiro Hiranouchi, Finiteness of certain products of algebraic groups over a finite field. Algebraic number theory and related topics 2012, 3-14, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B51, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2014. 査読あり .
<http://ci.nii.ac.jp/naid/110009911433/en>

16. Shigeyuki Kondo and Ichiro Shimada, The automorphism group of a supersingular K3

surface with Artin invariant 1 in characteristic 3. 査読あり. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2014, no. 7, 1885-1924. doi: 10.1093/imrn/rns274

17. Ichiro Shimada, Projective models of the supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 5. *J. Algebra* 403 (2014), 273-299. 査読あり. doi: 10.1016/j.jalgebra.2013.12.029

18. Makoto Matsumoto, Mutsuo Saito and Kyle Matoba, A computable figure of merit for quasi-Monte Carlo point sets. *Math. Comp.* 83 (2014), no. 287, 1233-1250. 査読あり. doi: 10.1090/S0025-5718-2013-02774-3

19. Ichiro Shimada, A note on rational normal curves totally tangent to a Hermitian variety. *Des. Codes Cryptogr.* 69 (2013), no. 3, 299-303. 査読あり. doi: 10.1007/s10623-012-9662-x

20. Nobuyoshi Takahashi, Nonstandard point counting for algebraic varieties. *Comm. Algebra* 41 (2013), no. 3, 971-988. 査読あり. doi: 10.1080/00927872.2012.737074

21. Makoto Matsumoto and Takehito Yoshiaki, Existence of higher order convergent quasi-Monte Carlo rules via Walsh figure of merit. *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2012*, 569-579, Springer Proc. Math. Stat., 65, Springer, Heidelberg, 2013. 査読あり. doi: 10.1007/978-3-642-41095-6_29

22. Hiroshi Haramoto, Makoto Matsumoto, Takuji Nishimura and Yuki Otsuka, A non-empirical test on the second to the sixth least significant bits of pseudorandom number generators. *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2012*, 417-426, Springer Proc. Math. Stat., 65, Springer, Heidelberg, 2013. 査読あり. doi: 10.1007/978-3-642-41095-6_19

23. Makoto Matsumoto, Introduction to arithmetic mapping class groups. *Moduli spaces of Riemann surfaces*, 319-356, IAS/Park City Math. Ser., 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013. 査読あり. <http://bookstore.ams.org/pcms-20>

24. Josef Dick and Makoto Matsumoto, On the fast computation of the weight enumerator polynomial and the t-value of digital nets over finite abelian groups. *SIAM J. Discrete Math.* 27 (2013), no. 3, 1335-1359.

査読あり. doi:10.1137/120893677

25. Mutsuo Saito and Makoto Matsumoto, Variants of Mersenne twistor suitable for graphic processors. *ACM Trans. Math. Software* 39 (2013), no. 2, Art. 12, 20 pp. 査読あり. <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/MTGP/mtgp3.pdf>

[学会発表](計 21 件)

1. Ichiro Shimada, Computer-aided calculations in the study of K3 surfaces, Colloquium talk, 17 March, 2016, Vietnam National University, Hanoi, Vietnam
2. Ichiro Shimada, Automorphisms of supersingular K3 surfaces and Salem polynomial, "Conference on K3 surfaces and related topics", 16 November, 2015, KIAS, Seoul, Korea
3. Ichiro Shimada, On the topology of projective subspaces in complex Fermat varieties, "Geometry, Topology and Combinatorics of Hyperplane Arrangements and Related Problems", 16 September, 2015, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, Spain
4. Ichiro Shimada, Automorphisms of supersingular K3 surfaces and Salem polynomials, Tsuda College Mini-Workshop "Calabi-Yau Varieties: Arithmetic, Geometry and Physics", 07 August, 2015, Tsuda College, Tokyo
5. Ichiro Shimada, On the topology of projective subspaces in complex Fermat varieties (joint work with Alex Degtyarev), Workshop "Motives and Algebraic Geometry", 29 May, 2015, Hokkaido University, Sapporo
6. Makoto Matsumoto, WAFOM with parameter for higher QMC: Revenge of the algebraic code, Part II, 10th IMACS Seminar on Monte Carlo Methods, 2015/07/06-10, JKU, Linz, Austria
7. Ichiro Shimada, Holes of the Leech lattice and projective models of K3 surfaces, Arithmetic and Algebraic Geometry 2015, 28 January, 2015, Graduate School of Mathematical

- Sciences, The University of Tokyo
8. 平之内俊郎, Class field theory of curves over local fields, East Asia Number Theory Conference, 2015 年 8 月 24 日, 春川 (韓国)
 9. Ichiro Shimada, K3 Surfaces and Lattice Theory, Seminar of Group Algebraic topology, 02 December, 2014, Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics, Hanoi, Vietnam
 10. Ichiro Shimada, K3 Surfaces and Lattice Theory, 日本数学会 秋季総合分科会 企画特別講演, 28 September, 2014, 広島大学
 11. Ichiro Shimada, K3 Surfaces and Lattice Theory, Colloquium talk, 05 August, 2014, National University of Singapore, Singapore
 12. Ichiro Shimada, The graphs of Hoffman-Singleton, Higman-Sims, McLaughlin, and the Hermitian curve of degree 6 in characteristic 5, 第 31 回代数的組合せ論シンポジウム, 20 June, 2014, 東北大学片平さくらホール
 13. Ichiro Shimada, On the supersingular K3 surface in characteristic 5 with Artin invariant 1, 函館数論幾何ワークショップ, 28 May, 2014, 北海道教育大学函館校
 14. Ichiro Shimada, On the supersingular K3 surface in characteristic 5 with Artin invariant 1, K3 surfaces and their moduli, 07 May, 2014, Schiermonnikoog, Netherlands
 15. Ichiro Shimada, On the automorphism groups of certain singular K3 surfaces, Oberseminar Algebraische und Arithmetische Geometrie, 28 April, 2014, Leibniz Universit"at Hannover, Germany
 16. Makoto Matsumoto, Walsh Figure of Merit (WAFOM) for digital nets: An easy measure for higher order convergent QMC, 11th International Conference on Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing, 2014/04/07-11, KU Leuven, Leuven, Belgium
 17. Ichiro Shimada, An algorithm to compute automorphism groups of K3 surfaces, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2014, 10 March, 2014, Hiroshima University
 18. Ichiro Shimada, On the supersingular K3 surface in characteristic 5 with Artin invariant 1, Arithmetic and Algebraic Geometry 2014, 27 January, 2014, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo
 19. Ichiro Shimada, Borchers method and automorphism groups of K3 surfaces, Complex Analysis and Topology of Discrete Groups and Hyperbolic Spaces, 21 January, 2014, RIMS, Kyoto University
 20. Ichiro Shimada, An algorithm to compute automorphism groups of K3 surfaces, The Asian Mathematical Conference 2013 (AMC 2013), 02 July, 2013, Busan, Korea
 21. 平之内俊郎, Computations of K-groups of reciprocity functors, Workshop on reciprocity sheaves, 2013 年 7 月 13 日, Yatsugatake Natural and Culture Park
- 〔その他〕
ホームページ等
- K3 曲面
<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~shimada/K3.html>
- 強正則グラフ
<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~shimada/Hgraphs.html>
- 国際研究集会 “Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2016” の web page
<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/branched/index2016.html>
6. 研究組織
(1) 研究代表者
島田 伊知朗 (Shimada Ichiro)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 : 10235616
- (2) 研究分担者

石井 亮 (Ishii Akira)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号： 10252420

木村 俊一 (Kimura Shun-ichi)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号： 10284150

高橋 宣能 (Takahashi Nobuyoshi)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号： 60301298

松本 眞 (Matsumoto Makoto)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号： 70231602

平之内 俊郎 (Hiranouchi Toshiro)
広島大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号： 30532551

高橋 浩樹 (Takahashi Hiroki)
徳島大学・ソシオテクノサイエンス研究部・
教授
研究者番号： 90291476