

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 26 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400045

研究課題名(和文) 超離散化と圏論的手法による代数多様体と特異点の研究および工学への応用

研究課題名(英文) Study of algebraic varieties and singularities by ultradiscretization and categorical method, and its application to engineering

研究代表者

小林 正典 (Kobayashi, Masanori)

首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号：60234845

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：K3曲面に関わる特異点の導来圏の研究について学会発表で報告した。実特異点の爆発同値に関しては、学会発表を行い、雑誌論文で「小林・Kuoの例」として知られる例を明示し、基本的な不変量を定義し、実解析的曲面の間の実解析的写像は2種の爆発の合成に書き表せることを示した。トロピカル曲線についてはコンパクトリーマン面との類推からゴナリティ等の共同研究を行い(学会発表)論文にまとめている。トロピカル幾何の工程計画問題への応用では、最短完了時間のトロピカル多項式から代数的操作によりプロジェクトネットワークの簡約化・分解・位相分類等の情報を抽出する研究を行った(学会発表)。

研究成果の概要(英文)：We report a study of derived category of singularities related to K3 surfaces in talk 10. We gave a talk 6 about blow-analytic equivalence of real singularities, and published paper 2 where we present so-called Kobayashi-Kuo example, define a basic set of invariants and showed any real analytic map between real analytic surfaces are factorized by two types of blowingups. As for tropical curves, we follow an analogy to compact Riemann surfaces. We made a collaborate study on such as gonality, which was shown in talk 1 and 2 and forthcoming paper. For an application of tropical geometry to scheduling problems, we present how to reduce, decompose and classify project networks by algebraic procedures for its minimum finishing time, which is a tropical polynomial in Talk 4, 5, 7, 8 and 9.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数学 トポロジー トロピカル幾何 離散事象システム

1. 研究開始当初の背景

(1) K3 曲面・特異点の研究

ミラー対称性は複素幾何とシンプレクティック幾何の間に等価性があることを予想する。特に SYZ 予想はカラビ・ヤウ多様体のミラーが双対トーラスファイブレーションで得られると予想する。中間次元トーラスの構成は申請者が初めて成功しており、実代数多様体を用いていた (小林, 1998)。

14 個のユニモダル例外型超曲面特異点に対し、Milnor ファイバーのコンパクト化として現れる K3 曲面の中間次元ホモロジーに、特異点解消 (の双対) に対応する代数的輪体と、変形非特異化の消滅輪体が含まれる。これらはミラー対称性で入れ替わる。植田・真瀬との共同研究では、代数的輪体の対応物を圏論的に構成し、圏論的「交点数」から Dynkin 図形が復元できることを示した。導来圏が幾何学的対象となりつつあることの例である。さらに広げた対象では、95 個あることで知られている重み付き超曲面 K3 特異点族は、実は本質的に 75 種類であることを真瀬との共同研究で示したところであった。導来圏で例外型に対応する結果はまだ知られていなかった。

実代数多様体は、Nash の定理より微分同相ならば実解析的になるなど、複素の場合より位相幾何的であり独自の技法が必要である。Kuo による爆発解析同値の概念は系統的かつ生産的である。平面曲線の特異点の場合、分枝が 2 本以下の場合には完全に分類されていた (小林-Kuo 1998, 他)。3 本の場合も申請者および当該年度から大学院生の Valle により分類されつつあった。

「計算可能」とは、有限の記述をもち有限回の手続きで終了するものとして定式化される。これは通常の現代数学の存在証明とは異なる。具体的構成なしに、背理法で存在を示したり選出公理を用いて構成したりするのでは不十分である。とはいえ、手続きは「停止はするがいつかはわからない」ものであり、これは Noether 環のイデアル列の性質と合致する。これを用いて学習理論での正データの学習可能性に関する種々の条件に対し、可換環論でモデルを構成していた。

(2) トロピカル多様体の研究

「超離散化 (脱量子化)」とは微分方程式で時間・空間のみならず関数の値も離散化したもので、可積分系等で古典的現象と同様の現象が見出されている。式 $f(x)$ の超離散化は、 $|x| = e^{(X/h)}$ として $h \rightarrow 0$ の漸近挙動 $\lim_{h \rightarrow 0} h \log |f(x)|$ であり、 xy は $X+Y$ に、 $x+y$ は $\max\{X, Y\}$ になる。このマックスプラス代数は情報数学でもトロピカル代数として研究されていた。トロピカル代数を関数 (半) 環とする新しい幾何学がトロピカル幾何学であり、射影平面内の曲線の数え上げが、対応するトロピカル曲線の本数として簡単に計算できる (Mikhalkin) ことで脚光を浴びていた。

トロピカル幾何およびその萌芽であるトーリック幾何の対象は、多面体の組合せ論的データから構成されるため不変量等の計算が容易であり、様々な分野でモデルの構成によく使われる。多面体の面は単項式のべきからなる可換モノイドの素イデアルに対応することに注目する。可換環を基礎としたスキーム理論は非常に有用であるが、可換モノイドを基礎とすると、理論が簡明になり、かつ多面体の理論と極めて整合的になる。ログ幾何に限れば例えば Ogus によるプレプリントが Web 上で公開されているものの、未完であり方向性も異なる。確固とした基礎付けとなる研究と文献が必要である。

次に工程計画問題への応用の着想に至った背景を説明する。2010 年度に「流通と理学」について内閣府からの委託研究があり、その過程で工程計画問題の最小終了時間がトロピカル多項式であることを再発見した。制御理論の分野では近年、笠原・高橋・五島らにより資源衝突問題等への応用がなされていた。申請者は初めて幾何学的視点を導入し、さらに道を頂点とするグラフを考察したクリティカルパスの変化がトロピカル超曲面で起こることを見出し、これを元にクリティカルパスの遷移を幾何的に表し可視化する全く新しい方法を開発した (連携研究者の小田切氏との共同研究)。この研究は計測自動制御学会の部会から招待講演を受けた。

2. 研究の目的

上記の様々な問題について相互の連関により研究するのが目的である。

(1) 例外型に対して得られた結果を、95 個の超曲面 K3 特異点等に対し拡張したい。例外型と異なり Milnor ファイバーを重み付き変形で取れないので、始めにスタック版を考察する。実特異点に対しては、爆発解析同値を用いた分類を継続する。交点行列の余階数による不変量を発見しており、それを用いて平面曲線の重要な場合を完了し、2 次元以上の場合を考察する。4 次元におけるシンプレクティック構造との関連が目標の一つである。学習理論においては、モデル構成に用いた本質は自然数モノイドの有限直和に対する Dickson の補題であった。実特異点の研究および (2) を踏まえて新たな例の構築や、知見の発見に努める。

(2) 拡張モノイド (圏) を導入して、既約の枠組みを外した組合せ論的代数幾何の基礎付けを行う。多面体複体の圏との随伴性を記述し、変形理論に踏み込むのが目標である。工程計画問題における幾何的研究は始まったばかりであり、基礎から応用までやるべき仕事がたくさんある。中でも重要なのが、大規模ネットワークの振舞いを小さな部分の組合せとして理解することである。そのためにまずクラスタ・コクラスタという概念を定式化し、階層的な大規模データの一つの解析手法を与える。これとは別に、対称性をもつ対

象を開発するため道の空間に対する群論的手法を導入したい。また実験・応用のための援用ソフトウェアを開発する。

3. 研究の方法

ミラー対称性からの着想を得ながら、超離散化と圏論的手法を道具として、代数多様体、特にトロピカル多様体・ $K3$ 曲面・特異点の研究を行った。また、それに基づき工学における斬新な応用を提案していった。

基本的には研究代表者と連携研究者が必要に応じて情報収集をしながら行った。研究集会や勉強会の開催、講演者の招聘を通じて、広い分野の研究者との相互作用を引き起こし、新たな研究テーマを発掘していくことも目指した。また研究の支援のためポストドクを1名1年間雇用し、ソフトウェア開発を行った。

共同研究は首都大学東京におけるセミナーや、研究集会における情報交換等を通じて行った。東京大学玉原国際セミナーハウスにおいて代数幾何およびその周辺分野から最先端の話題を選び（代数多様体の分類理論と正標数の手法 II, 代数力学系, Fano 多様体の有理性問題と双有理幾何学）数回の勉強会を共催した。毎回約 20 名の参加者を集め実質的で活発な議論を行うことができた。国際研究集会では、シドニーでの特異点研究集会やソウルでの国際数学者会議等で研究発表を行うことで議論を深め情報収集を行った。

4. 研究成果

研究目的のうちで、特にトロピカル幾何とその工程計画問題への応用、実特異点の研究に発展がみられた。

- (1) $K3$ 曲面について、得られた結果を学会発表で報告した。
- (2) 特異点について、得られた結果を学会発表で報告した。また、平面・曲面の実特異点の爆発同値に関する基本的結果を雑誌論文として出版した。この中で、「小林・Kuo の例」として知られている例を明示し、分類のためのいくつかの基本的不変量を定義した。また、実代数的曲面の間の実解析的写像を、複素数の場合と異なる爆発を用いると爆発の合成に書き表せることを示した。
- (3) トロピカル幾何について、主としてコンパクトリーマン面との類推の方向からの研究を行った。これらの結果については、研究室で指導する大学院生による結果と総合して、トロピカル曲線のゴナリティ等に関する研究としてまとめた形になり（学会発表）、現在、論文としてまとめている。特に種数 3 の場合にはトロピカル改変を施すことで古典の場合と類似の命題を得た。
- (4) 工程計画問題への応用について。
最短完了時間というトロピカル多項式から、代数的操作によってプロジ

ェクトネットワークで鍵となる位相幾何的情報を抽出する研究を行った。工程計画問題のプロジェクトネットワークの最短完了時間をトロピカル多項式とみて、そのニュートン多面体の頂点の隣接関係がクリティカルパスの遷移し易さに対応すること、それを予め計算し、「隣接グラフ」として可視化しておくことで、事故や業務改善により各作業の所要時間が変化した場合に、どのクリティカルパスに遷移可能かがわかる、という基本的結果について、学会発表で報告を行った。そこでは、実際にあるネットワークの最短完了時間に対応する多項式を R 多項式と呼び、そこから代数的性質のみ抽出して基本定理が同様に成り立つ（が必ずしもネットワークに対応するとは限らない）多項式を P 多項式と呼んだ。主定理は P 多項式であれば成立することを示した。

次いで、複雑なトロピカルネットワークを、単純なネットワークの組合せとして理解することを、トロピカル多項式を用いて行う研究を行った。提案した「クラスタ」の概念を用いると、部分ネットワークにおけるクリティカルパスの隣接グラフを組み合わせて、全体の隣接グラフが復元できる。また、最短完了時間がトロピカル P 多項式として因数分解できるときには、各因子が自動的に R 多項式すなわちある小さなネットワークの最短完了時間に必ず対応することが示せた。この結果、複数のネットワークに分離して考えることができる。これらの結果については学会発表で報告を行った。

与えられたネットワークに対しクラスタを求めるアルゴリズムを作り、実装した。このソフトウェアを用いて、作業の個数が少ない場合にネットワークの全分類を行い、クラスタ化がどの程度実際に行えるかを調べた。大半はクラスタ化により小さなネットワークに帰着可能であり、計算速度も十分に高速であることを確かめた。この結果については学会発表で報告を行った。

もし作業が互いにまったく無関係であれば、すべてのクリティカルパスが隣接することは当然である。このときニュートン多面体は単体になる。2つのクリティカルパスが隣接しない場合、ニュートン多面体が退化し、ネットワークにクロス構造と呼ぶ顕著な構造が対応して現れることを見出した。一般に、最短完了時間のニュートン多面体は頂点の座標が 0 と

1 だけからなる 0/1 多面体と呼ばれる多面体になる。頂点の隣接判定は一般には多項式時間にならないが、最短完了時間に対しては多項式時間で判定できることを示した。さらにニュートン多面体の次元が 3 以下の場合に、ネットワークの位相幾何学的分類が行えることを示した。これらの結果は、学会発表 で報告を行った。

以上の結果に対しては、離散事象システム研究会の各回の資料に査読無し論文として掲載しており、論文としてまとめている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

M. Kobayashi, On blow-analytic equivalence of plane curves, Saitama Math. J., 査読有, Vol.31 (2017), 103-113,

<http://j-mi.org/articles/view/296>

M. Kobayashi and S. Odagiri, Tropical geometry of PERT, Journal of Math-for-Industry, 査読有, Vol.5 (2013B-8), 145-149.

<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/research/pdf/smj31-6.pdf>

[学会発表](計 10 件)

小林正典, Recent development in tropical curve theory, 第 5 回きりたんぼ数学セミナー, 2017 年 3 月 11 日, 秋田工業高等専門学校(秋田県秋田市)

小林正典, Recent development of tropical curve theory, 代数学セミナー, 2017 年 3 月 6 日, 広島大学理学部(広島県東広島市)

小林正典, Tropical geometry of scheduling problem and 0/1-polytopes, Topics on tropical geometry, integrable systems and positivity, 2015 年 12 月 24 日, 青山学院大学理学部(神奈川県相模原市)

小林正典, 小田切真輔, 工程計画問題におけるクロス構造の解析, 第 58 回離散事象システム研究会, 2015 年 9 月 25 日, 名城大学名駅サテライト(愛知県名古屋)

小口理也, 小田切真輔, 小林正典, 退化した 0/1 多面体と工程計画問題, 第 56 回離散事象システム研究会, 2014 年 12 月 12 日, 産業技術大学院大学(東京都品川区)

Cristina Valle, 小林正典, On the blow-analytic equivalence of plane curves, International Congress of

Mathematicians 2014, 2014 年 8 月 20 日, ソウル(韓国)

小林正典, 小田切真輔, プロジェクトネットワークのクラスタ化アルゴリズムとその実装について, 第 55 回離散事象システム研究会, 2014 年 6 月 6 日, 高千穂町コミュニティセンター(宮崎県高千穂町)

小林正典, 小田切真輔, トロピカル多項式を変形してプロジェクトネットワークを簡約する手法について, 第 54 回離散事象システム研究会, 2013 年 12 月 6 日, 石川県文教会館(石川県金沢市)

小林正典, 工程計画問題とトロピカル幾何, トロピカル・セミナー, 2013 年 11 月 22 日, 青山大学理工学部(神奈川県相模原市)

小林正典, A note on exceptional unimodal singularities and K3 surfaces, Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities Sydney 2013, 2013 年 9 月 10 日, シドニー(オーストラリア)

[図書](計 1 件)

小林正典, 寺尾宏明, 培風館, 線形代数講義と演習 改訂版, 190+viii ページ

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)
なし

取得状況(計 0 件)
なし

[その他]

ホームページ等

<http://www.comp.tmu.ac.jp/masanori/welcome-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小林正典 (KOBAYASHI MASANORI)

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号: 60234845

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

小田切真輔 (ODAGIRI SHINSUKE)

秀明大学・学校教育学部・講師

研究者番号: 20599774

(4) 研究協力者

ヴァッレ・クリスティーナ (VALLE, CRISTINA)

首都大学東京・大学院理工学研究科・客員研究員