

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 27 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400050

研究課題名(和文) 正標数の特異点上の極大コーエン・マコーレー加群の研究

研究課題名(英文) Maximal Cohen-Macaulay modules over singularities of positive characteristic

研究代表者

吉田 健一 (YOSHIDA, Ken-ichi)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：80240802

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究においては、後藤四郎氏(明治大学)、高橋亮氏(名古屋大学)、大関一秀氏(山口大学)、渡辺敬一氏(日本大学)らと共に、古典的なウルリッヒ加群(極大線型加群)の一般化としてウルリッヒ加群とウルリッヒイデアルの概念を導入し、一般論を構築致しました。さらに、スペシャルマッケイ対応に注目して、2次元の有理二重点上のウルリッヒ加群、ウルリッヒイデアルの完全な分類を与えました。研究代表者は、奥間智弘氏と渡辺敬一氏と共に幾何種数を用いて pg イデアルの概念を導入して、有理特異点のイデアル論を拡張しました。応用として、2次元優秀正規環のグッドイデアルの存在定理を証明しました。

研究成果の概要(英文)：I introduced the notion of Ulrich modules and Ulrich ideals as a generalization of classical Ulrich modules (or linear maximal Cohen-Macaulay modules) and developed a general theory with Shiro Goto (Meiji Univ.), Ryo Takahashi (Nagoya Univ.), Kazuho Ozeki (Yamaguchi Univ.) and Kei-ichi Watanabe (Nihon Univ.). Using special McKay correspondence, we classified a complete list of Ulrich modules and ideals over 2-dimensional rational double point. We introduced the notion of pg -ideals in terms of geometric genus, and extended an ideal theory of rational singularities. As an application, we proved an existence theorem for 2-dimensional excellent normal singularities.

研究分野：可換環論

キーワード：Ulrich module Ulrich ideal rational singularity F-threshold McKay correspondence

1. 研究開始当初の背景

本研究に先立ち、古典的なウルリッヒ加群の理論は既に整備されており、存在定理が主要な問題であった。その後、本研究に先立ち古典的なウルリッヒ加群の概念を拡張して、イデアルに付随するウルリッヒ加群とウルリッヒイデアルの概念が導入された。極小重複度を持つコーエン・マコーレー局所環上で、極大イデアルに関するウルリッヒ加群が古典的な意味でのウルリッヒ加群である。また、その極大イデアルの役割を一般化したものがウルリッヒイデアルである。ウルリッヒイデアルはゴレンシュタイン環上ではスペシャルイデアルという概念とほぼ一致する。そのことを用いると、1次元の2元生成数値的半群上の単項式ウルリッヒイデアルは完全に分類可能である。また、古典的なウルリッヒ加群に対して成り立つシジジーや標準加群による双対性に関する結果、ウルリッヒイデアルの極小自由分解などの結果も既に得られていた。しかしながら、高次元の具体例は乏しい状況であった。

2. 研究の目的

研究代表者はヒルベルト・クンツ重複度の研究を通して、正標数の研究において加群の構造解析の重要性を認識した。特にウルリッヒ加群は重複度を固定したときに生成系が最大になると言う意味で特殊な加群である。F有理特異点もしくは有理特異点上のウルリッヒ加群、ウルリッヒイデアルの完全な分類を主目的としている。あわよくば、フロベニウスプッシュフォワードの加群構造を明らかにして、ウルリッヒ加群の振る舞いなどを調べることをきっかけにして、ヒルベルト・クンツ重複度の計算等に応用したいと考えている。さらに、リーマン・ロッホの定理やスペシャルマッカイ対応などを利用して、2次元有理特異点のウルリッヒイデアルとスペシャルイデアルを分類することも目的としている。

3. 研究の方法

2次元の有理特異点におけるウルリッヒイデアルの分類を、代数幾何学的方法に基づいて完成させる。実際には、スペシャルマッカイ対応、リーマン・ロッホの定理を用いて、ウルリッヒイデアルの代わりにまずスペシャルイデアルを分類し、その結果をウルリッヒイデアルの結果に書き換える。特殊なケースとして、2次元巡回商特異点におけるウルリッヒ加群の分類を中嶋氏(名古屋大学)と研究する。表現論的手法を用いて、結果の高次元化を図る。すなわち、2次元の有理二重点

を単純超平面特異点に置き換えて、その場合のウルリッヒ加群、ウルリッヒイデアルの分類を行う。正標数の場合のアプローチについては、連携研究者の高木氏の協力も仰いで、フロベニウスプッシュフォワードの加群の構造の解析を行い、ヒルベルト・クンツ重複度の計算方法を確立する。

4. 研究成果

1) 単純特異点における(イデアルに付随する)ウルリッヒ加群とウルリッヒイデアルの分類:

代数幾何学的手法(スペシャルマッカイ対応、リーマン・ロッホの定理)と可換環論を組み合わせ、2次元の有理二重点におけるウルリッヒ加群及び、ウルリッヒイデアルの分類(どのイデアルに付随するかも含まれる)に成功した。さらに、クネラーの周期性などを用いて、高次元の単純特異点におけるウルリッヒ加群、ウルリッヒイデアルの分類に成功した(前者はアクセプト済み)後者は論文を準備中である。

2) 2次元有理特異点におけるウルリッヒイデアル、スペシャルイデアルの判定: 2次元有理特異点においては有効にスペシャルマッカイ対応とリーマン・ロッホの定理を用いることにより、スペシャルイデアル、及び弱スペシャル加群の概念が導入され、その判定法を与えることができた。

3) グッドイデアルの存在定理, pg イデアルの導入: ウルリッヒイデアルは、後藤・居相・渡辺の意味でグッドイデアルの一種である。この視点から研究代表者は奥間氏・渡辺氏と共に幾何種数を用いて、 pg イデアルの概念を導入して、特異点解消を持つ2次元の正規特異点上にグッドイデアルが存在することを証明した。その後の一連の研究において pg イデアルの良い性質が明らかになり、ブローアップ代数による特徴付けなども得られている。

4) 概ゴレンシュタイン環の概念の導入: 研究代表者が現在最も力を入れている研究対象は概ゴレンシュタイン環である。概ゴレンシュタイン環は環自身から標準加群への準同型写像の余核が次元の低いウルリッヒ加群になるものとして特徴付けできる。2次元有理特異点は常にこの性質を持つことが知られている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

〔雑誌論文〕(計 10 件)

奥間 智弘, 渡辺 敬一, 吉田 健一, Rees algebras and p_g ideals in a two-dimensional normal local domain, Journal Pure and Applied Algebra, 査読有, 2016 掲載確定.

奥間 智弘, 渡辺 敬一, 吉田 健一, Good ideals and p_g -ideals in two-dimensional normal singularities, *manuscripta mathematica*, 2016, 査読有, 掲載確定.

市原 一裕, 吉田 健一, On the most expected number of components for random links, *Tohoku Math. J.*, 2016 査読有, 掲載確定.

後藤 四郎, 松岡 直之, 谷口 直樹, 吉田 健一, The almost Gorenstein Rees algebras over two-dimensional regular local rings, *Journal Pure and Applied Algebra* 220, 3425 - 3436, 2016, 査読有.

後藤 四郎, 松岡 直之, 谷口 直樹, 吉田 健一, The almost Gorenstein Rees algebras of parameters, *Journal of Algebra* 452, 263 - 278, 2016, 査読有.

後藤 四郎, 大関 一秀, 高橋 亮, 渡辺 敬一, 吉田 健一, Ulrich ideals and modules over two-dimensional rational singularities, *Nagoya Mathematical Journal* 221, 69 - 110, 2016, 査読有.

木村 杏子, 寺井 直樹, 吉田 健一, Arithmetical rank of a squarefree monomial ideal whose Alexander dual is of deviation two, *Acta Mathematica Vietnamica* 40, 375-391, 2016, 査読有.

寺井 直樹, 吉田 健一, Multiplicity and Castelnuovo-Mumford regularity and Stanley-Reisner rings, *Acta Mathematica Vietnamica* 40, 61-69, 2015, 査読有.

後藤 四郎, 大関 一秀, 高橋 亮, 渡辺 敬一, 吉田 健一, Ulrich ideals and modules, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 156, 137-166, 2014, 査読有.

廣瀬 大輔, 渡辺 敬一, 吉田 健一, F -thresholds vs. a -invariants for standard graded toric rings, *Communications in Algebra* 42, 2704-2720, 2014,

査読有.

〔学会発表〕(計 20 件)

吉田 健一, Almost Gorenstein Rees algebras of powers of integrally closed ideal, International Conference and the 8th Japan-Vietnam joint seminar on Commutative Algebra, 2016 年 3 月 21 日, VISAM (ハロン湾, ベトナム).

吉田 健一 (後藤 四郎, 松岡 直之, 谷口直樹), The almost Gorenstein Rees algebras of contracted ideals, 日本数学会 2016 年度年回代数学分科会, 2016 年 3 月 16 日, 筑波大学 (茨城県つくば市).

吉田 健一 (渡辺 敬一, 奥間 智之), 2 次元特異点の整閉イデアルの core と有理特異点の特徴付け, 日本数学会 2016 年度年回代数学分科会, 2016 年 3 月 16 日, 筑波大学 (茨城県つくば市).

吉田 健一 (市原 一裕), ランダム絡み目の最頻成分数と双曲性, 日本数学会 2016 年度年回トポロジー分科会, 2016 年 3 月 16 日, 筑波大学 (茨城県つくば市).

吉田 健一 (榎本ちひろ), 生成系の少ない単項式イデアルの clean 性について, 2016 年 1 月 25 日, 岡山理科大学 (岡山県岡山市).

吉田 健一, Almost Gorenstein Rees algebras, 月曜特異点セミナー, 2016 年 1 月 18 日, 日本大学文理学部 (東京都世田谷区).

吉田 健一, Almost Gorenstein Rees algebras of powers of maximal ideals, Workshop on Commutative Algebra -Part II, Local algebra and Representation theory -, 2016 年 1 月 3 日, VISAM (ハロン湾, ベトナム).

吉田 健一 (奥間智弘, 渡辺敬一), A characterization of 2-dimensional rational singularities via Core of ideals, 第 37 回可換環論シンポジウム, 2015 年 11 月 21 日, 倉敷シーサイドホテル (岡山県倉敷市).

吉田 健一 (後藤 四郎, 谷口 直樹, 松岡直之), Almost Gorenstein Rees algebras of some integrally closed ideals, 第 37 回可換環論シンポジウム, 2015 年 11 月 21 日, 倉敷シーサイドホテル (岡山県倉敷市).

吉田 健一(後藤四郎,谷口直樹,松岡直之), The almost Gorenstein Rees algebras of socle ideals, 第 37 回可換環論シンポジウム, 2015 年 11 月 20 日, 倉敷シーサイドホテル(岡山県倉敷市).

吉田 健一, Almost Gorenstein Rees algebras of integrally closed ideal, The JV seminar of commutative algebra, 2015 年 9 月 19 日, 明治大学理工学部(神奈川県川崎市).

吉田 健一(後藤四郎,谷口直樹), 2 次元正規特異点の pg ideal の Rees 代数の Almost Gorenstein 性, 日本数学会 2015 年秋季総合分科会代数学分科会, 2015 年 9 月 13 日, 京都産業大(京都府京都市).

吉田 健一(後藤四郎,谷口直樹), The almost Gorenstein Rees algebras of socle ideals, 日本数学会 2015 年秋季総合分科会代数学分科会, 2015 年 9 月 13 日, 京都産業大(京都府京都市).

吉田 健一(後藤四郎,谷口直樹,松岡直之), Almost Gorenstein Rees algebras, 第 48 回環論及び表現論シンポジウム, 2015 年 9 月 8 日, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科(愛知県名古屋市).

吉田 健一, Almost Gorensteinness of Rees algebras of pg -ideals, 第 25 回可換環論セミナー, 2015 年 1 月 26 日, 静岡大学理学部(静岡県静岡市).

吉田 健一(渡辺敬一,奥間智弘), Integrally closed ideals of 2-dimensional normal singularities, 第 36 回可換環論シンポジウム, 2014 年 11 月 24 日, IPC(神奈川県葉山市).

吉田 健一, Ulrich ideals and modules of simple singularities, International conference on COMMUTATIVE ALGEBRA and its Interaction to Algebraic Geometry and Combinatorics, 2013 年 12 月 19 日, ハノイ大学(ハノイ,ベトナム).

吉田 健一(渡辺敬一,奥間智弘), Good ideals on 2-dimensional normal singularities, RIMS 研究集会・第 35 回可換環論シンポジウム, 2013 年 12 月 4 日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市).

吉田 健一(後藤四郎,大関一秀,高橋亮,渡辺敬一), Ulrich ideals on hypersurfaces, RIMS 研究集会・第 35 回可換環論シンポジウム, 2013 年 12 月 2

日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市).

吉田 健一, 単純特異点上の Ulrich 加群と Ulrich イデアル, 第 58 回代数学シンポジウム, 2013 年 8 月 27 日, 広島大学(広島県東広島市).

[図書](計 0 件)

[産業財産権]
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉田 健一(YOSHIDA, Ken-ichi)
日本大学・文理学部・教授
研究者番号: 80240802

(3) 連携研究者

橋本 光靖(HASHIMOTO, Mitsuyasu)
岡山大学・理学部・教授
研究者番号: 10208465

高木 俊輔(TAKAGI, Shunsuke)
東京大学・数理科学研究科・准教授
研究者番号: 40380670