2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　6 月　6 日現在

機関番号：32686
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：25400052
研究課題名（和文）モーデル・ヴェイユ格子の総合的研究

研究課題名（英文）Studies of Mordell-Weil Lattices

研究代表者
塩田　徹治（SHIODA, Tetsuji）

立教大学・名誉教授・名誉教授

研究者番号：00011627

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：モーデル・ヴェイユ格子の総合的研究として、主に次のテーマを研究した。1．楕円曲面の乗法的卓越族の構成と応用。ワイル群の不変式論を通して、モーデル・ヴェイユ格子という本来ディオファンタス問題から出発した主題が、格子理論や代数方程式論との関わりを超えて、リー群（環）の表現論とも密接な関係をもつことが明らかになった。2．フェルマー曲面の高種数曲線によるファイブレーションのモーデル・ヴェイユ格子の解明。例えば、素数次のフェルマー曲面から定まる高種数モーデル・ヴェイユ格子の構造（ランク、ハイト公式等）を決定した。

研究成果の概要（英文）：The study of Mordell-Weil lattices has been focused on the following subjects.
1. The multiplicative excellent family of rational elliptic surfaces has the defining Weierstrass equation such that the coefficients form a set of fundamental invariants of the Weyl group in a Laurent polynomial ring. So the Mordell-Weil lattices, originally of Diophantine nature, can have a direct connection with the fundamental representations of Lie groups of the corresponding type, which admits various applications.
2. We have examined the structure of Mordell-Weil lattices of higher genus fibration on a Fermat surface. If the degree is relatively prime to 6, the structure (rank, height pairing etc.) is determined. More generally, the method applies to smooth surfaces containing a line.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何学　モーデル・ヴェイユ格子　ガロア表現　有理楕円曲面　フェルマー曲面　ネロン・セヴェリ格子　高種数ファイブレーション

１．研究開始当初の背景

研究代表者（塩田）が１９８９年以来構築してきたモーデル・ヴェイユ格子の理論は，格子の新しい構成法を与えるとともに，格子の情報を用いて，モーデル・ヴェイユ群本来のディオファンタス的問題に迫り数論的性質を導き，あるいは，代数曲面の幾何学的性質を導きだす可能性をもつ．この優れた両面性をもとに、これまでに多くの成果が理論から応用にわたる領域で得られており，われわれの研究は国際的にも高い評価を得てきた．

本研究開始当初まで得られた具体的成果には，有理楕円曲面の整点とグレブナ基底の関係や，K3 曲面と球のつめこみ問題，ある種の K3 楕円曲面のモーデル・ヴェイユ階数公式、また代数曲面のピカール数，退化と特異点への応用などが含まれる．

２．研究の目的

本研究では、これまでの研究成果を踏まえたモーデル・ヴェイユ格子の総合的研究として，残された課題の中で，特に重要と思われる，次のテーマについて研究を深めることを目標とした．

（１）有理楕円曲面（例外型）の乗法的卓越族の構成と，ガロア表現と代数方程式の数論・代数曲面へのさらなる応用

（２）高種数ファイブレーションのモーデル・ヴェイユ格子とフェルマー曲面上の代数的サイクル

（３）関連する問題

３．研究の方法

これらの問題の研究には，理論的な設定から実例の構成にいたるまで思考の手助けとしてコンピュータによる計算が欠かせない．所期の結果を確立するために，本科研費で購入したコンピュータは大変役に立った．

国内外の研究者との意見の交換，とくに海外の優秀な研究者との直接的議論は研究の推進上極めて有用であった．とりわけ，ドイツ，米国の数学者 M.Schuett（ドイツ）, A. Kumar（米国）Degtyarev(トルコ),島田教授（広島大学） との共同研究は，数編の国際的に注目を集める研究論文に結実している．

４．研究成果

研究目的のテーマ毎に研究成果を要約すると以下の通りである（発表論文の番号付け等は次頁参照）．

（１）研究代表者によるモーデル・ヴェイユ格子が E_6 型の有理楕円曲面の乗法的卓越族の構成（2012 年学士院紀要論文に発表）に続き、Kumar との雑誌論文⑤において，E_7, E_8 型への拡張が確立された．これらの E_r (r=6,7,8) 型の乗法的卓越族に関する結果を、以前に構成した有理楕円曲面の加法的卓越族に比較して言えば,次の通りである．どちらの卓越族もワイル群 W(E_r)の不変式論と本質的に関連しているが，族を定義するワイヤシュトラス方程式の係数が,加法的な設定では，ワイル群 W(E_r) の基本不変多項式となるのに対し,乗法的な設定では,変数のローラン多項式環内の基本不変式となる.言い換えると,ワイヤシュトラス方程式の係数が例外 E_r 型リー群（または環）の基本指標系と等価，すなわち,互いに他を完全に決定する具体的表示で結ばれている．

この結果により,乗法的卓越族の場合にも，ガロア表現と代数方程式への自然な応用があり，以前に加法的卓越族の場合に得られたと同様，かつさらに広い応用をもつている．すなわち,有理数係数の有理関数体上に定義された楕円曲線でランクが８までのものの構成や有理数体のガロア拡大でワイル群 W(E_r)をガロア群にもつものの具体的構成など整数論への応用がある．また,Brieskorn の特異点解消理論の精密化，あるいは del Pezzo 曲面の数論にも多くの応用をもっている．顕著な例で言えば，E_6 型の有理楕円曲面の乗法的卓越族の結果を応用して，３次曲面とその上の２７本の直線に関する古典的な理論を見直し，新たに「MWL-アルゴリズム」と名付けた方法により，6 個のパラメータをもつ３次曲面の族とともに，その上の２７本の直線の定義方程式も与えることができる．その明示性により，とくに３次曲面と２７本の直線をすべて有理数係数で例示することも可能で，従って実数係数で正確な描画も可能とする方法である．文献 ②を参照.

（２）当テーマに関して，非特異なm次射影曲面の１直線を「軸」として固定したとき定まる「軸性ファイブレーション」の特異ファイバーを，トポロジーの観点からフェルマー曲面の場合に詳細に調べた増田−松本の最近の研究に負っている．これは m＞４のときフェルマー曲面から射影直線への高種数ファイブレーションを与える．その一般ファイバーは （m−１）次の平面曲線で，種数ｇ＝（m−２）（m−３）／２をもち，また特異ファイバーの位置と形が決定されている．

さて，高種数ファイブレーションのモーデル・ヴェイユ格子の一般論は，１９９０年代に研究代表者が与えていたが，上記フェルマー曲面の場合に適用すると，注目すべき結果が得られた（文献③参照）．フェルマー曲面のピカール数は既知（１９８０年代に青木・塩田により決定）であったので，対応するモーデル・ヴェイユ格子のランクが得られる．さらに，mが素数次ないし６と互いに素なとき，フェルマー曲面のネロン・セヴェリ群は直線達によって生成されることが，最近デグチャレフにより証明された（m＜１００のとき，先行の結果としてシュット・塩田・ヴァン・ルイクが示した）．これより，フェルマー曲面の高種数ファイブレーションのモーデル・ヴェイユ格子は，mが素数次ないし６と互いに素なときは，軸と交わらない直線の

定める切断達により生成されることが証明された．さらにこれらの切断の間のハイトペアリングは，直線達の交点数を用いた明示的な公式で与えられる．

実例として，m＝５，７等の場合にハイト行列式の計算をして、モーデル・ヴェイユ群の構造を決定した．多くの場合、この群は有限位数の元を含まないが、興味深いことに，m＝５のときモーデル・ヴェイユ群は２分点をもつことも分かった．より一般的に，雑誌論文③の方法は、フェルマー曲面以外の曲面の軸性ファイブレーションについても，また標数０に限らずmを割らない正標数の基礎体上の場合にも，適用可能である．二、三の実例の検証を通じて若干の新たな知見を得たが、この方向の今後の研究は十分価値があると期待される．

（３）４次フェルマー曲面と K3 として同型な４次曲面の研究（島田教授（広島大）との共著），雑誌論文①．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）
①I. Shimada, T. Shioda（塩田）：On a smooth quartic surface containing 56 lines which is isomorphic as K3 surface to Fermat quartic, Manuscripta Mathematica 153, 279-297, 2017, DOI: 10.1007/s00229-016-0886-3，査読有

②T. Shioda（塩田）：The MWL-algorithms for constructing cubic surfaces with preassigned 27 lines. Commentarii Math. Univ. St. Pauli 64, 157-186 (2015) ,査読有

③T. Shioda（塩田）：Mordell-Weil lattice of higher genus fibration on a Fermat surface, Journal of Math. Sci. Univ. Tokyo 22. 443-468 (2015)，査読有

④T. Shioda（塩田）：Elliptic fibrations of maximal rank on a supersingular K3 surfaces, Izvestia RAS, Ser. Math. 77(3), 139-148 (2013)，査読有

⑤A. Kumar, T. Shioda: Multiplicative excellent families of elliptic surfaces of type E_7 and E_8, Algebra and Number Theory 7-7, 1613-1639, (2013), DOI: 10.2140/ant.2013.7.1613,査読有

〔学会発表〕（計７件）**全て招待講演**

①塩田 徹治：2017 年 03 月 22 日, Mordell-Weil lattices and Invariant Theory, ***Igusa Conference "Local zeta functions and the Arithmetic of moduli spaces"***, ジョンズ・ホプキンス大学日米数学研究所,ボルチモア市（米国）

②塩田 徹治：2016 年 9 月 16 日, Brieskorn's resolution and Excellent families of elliptic surfaces, ***Workshop of Algebraic Geometry***, ハノーバー大学代数幾何学研究所,ハノーバー市（ドイツ）

③塩田 徹治：2016 年 3 月 7 日, An elementary algorithm for constructing a cubic surface with 27 lines, Conference "Branched coverings, Degenerations and related topics", 広島大学（広島県・東広島市）

④塩田 徹治：2016 年 3 月 8 日, Mordell-Weil lattice of higher genus fibration on Fermat surfaces, Conference "Branched covering, Degenerations and related topics", 広島大学（広島県・東広島市）

⑤塩田 徹治：2015 年 9 月 22 日, The MWL-algorithm for constructing a cubic surfaces with 27 lines, ***Seminar on Algebraic Geometry***, ハノーバー大学代数幾何学研究所,ハノーバー市（ドイツ）

⑥塩田 徹治：2015 年 5 月 13 日, Mordell-Weil lattice of higher genus fibration on a Fermat surface, Katz's Conference "Arithmetic Algebraic Geometry", 中国学士院（CAS）AMSS（数学研究所）,北京（中国）

⑦塩田 徹治：2014 年 1 月 28 日, Weierstrass transformation and cubic surfaces, Conference "***Arithmetic and Algebraic Geometry***", 東京大学大学院数理科学科．(東京都・目黒区）

〔図書〕（計 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：

国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　塩田　徹治（SHIODA, Tetsuji）
　立教大学・名誉教授・名誉教授
　研究者番号：00011627

(2)研究分担者
　　　なし

(3)連携研究者
　青木　昇（AOKI, Noboru）
　立教大学・理学部・教授
　研究者番号：30183130

(4)研究協力者
　　　なし