2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４０００５４
研究課題名（和文）モジュライ空間上のKZ方程式の基本解とリーマン・ヒルベルト問題

研究課題名（英文）Fundamental solutions of the KZ equation on moduli spaces and the Riemann-Hilbert problem

研究代表者
上野　喜三雄（UENO, KIMIO）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：７０１６０１９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：多重対数関数（polylogarithm）のみたす反転公式が，これを特徴づける加法的かつ再帰的なリーマン・ヒルベルト問題に他ならないことを示し，これを論文に纏めて発表した．この結果は，multiple polylogarithm（MPLと略す）に拡張できる．MPLのみたす反転公式から，これを特徴づける加法的かつ再帰的なリーマン・ヒルベルト問題が得られるが，これは一意可解であり，さらに，１変数KZ方程式の基本解を特徴づける乗法的なリーマン・ヒルベルト問題と同値であることが分る．これらの成果をまとめた論文を現在，専門誌に投稿中である．また，モノドロミー保存変形との関連性も追及し，学会発表をした．

研究成果の概要（英文）：The inversion formulas of polylogarithms can be regarded as a recursive Riemann-Hilbert (RH, for short) problem of additive type. Solving this problem, we can chracterize the polylogarithms. This problem generalizes to the case for multiple polylogarithms (MPL, for short). From the inversion formulas of MPL, one can also obtain a recursive RH problem of additive type, and the unique solvability can be shown. Furthemore, one can show that this problem is equivalent to the multiplicative Riemann-Hilbert problem of the fundamental solution for the KZ equation of one variable. The article summarizing these results is now submited to a mathematical journal. Recently, we investigate the connection to monodromy preserving deformation, and addressed at the annual meetings of Japan Mathematical Society.

研究分野：自然科学

キーワード：KZ方程式　多重対数関数　多重ゼータ値　リーマン・ヒルベルト問題　モノドロミー保存変形

１．研究開始当初の背景

多重対数関数（multiple polylogarithms）のみたす反転公式を加法的かつ再帰的リーマン・ヒルベルト問題とみなして，その一意可解性を調べる．また，KZ 方程式（特に，２変数 KZ 方程式）の基本解に対する接続問題との関連性を調べる．

２．研究の目的

この研究によって，多重対数関数，超多重対数関数の性質がモノドロミーの問題として解釈され，これらの関数への幾何学的理解が深まることが期待される．

３．研究の方法

乗法的リーマン・ヒルベルト問題を加法的なリーマン・ヒルベルト問題の再帰的な系に変換して考察することで，リーマン・ヒルベルト問題という複雑な解析的な問題が代数的な問題に還元できる．
手法的には，シャッフル代数とその双対ホップ代数である非可換冪級数環をフルに使って理論が記述される．

４．研究の成果

①**多重対数関数**（polylogarithms）$Li_k(z)$は次の**反転公式**をみたすことが知られている．

$$Li_k(z)- \log z\, Li_{k-1}(z)+ 1/2\log^2 z\, Li_{k-2}(z) + \cdots + Li_{21\cdots1}(1-z) = \zeta(k)$$

ここで，$\zeta(k)$は**オイラーのゼータ値**である．この反転公式は，$Li_k(z)$とその双対多重対数関数である$Li_{21\cdots1}(1-z)$に対する，**加法的リーマン・ヒルベルト問題**の形を取っている．また，**２重対数関数**（dilogarithm）$Li_2(z)$から出発すれば，

$$Li_2(z) \to Li_3(z) \to Li_4(z) \to \cdots$$

として，次々に polylogarithm が決まっていくので，**再帰的**（recursive）な式と見ることも可能である．これが，反転公式が**加法的かつ再帰的リーマン・ヒルベルト問題**であるという意味である．この考察をまとめて，大井周氏との共著論文「The inversion formula of polylogarithms and the Riemann-Hilbert problem」(2013)を発表した．

②それでは，これを**多重対数関数** multiple polylogarithms（MPL と略す）へ拡張しよう．MPL に対する変転公式は，私と奥田順一氏の共同研究によって得られている．それはつぎのように記述される．**許容指数** $k_1,\ldots, k_r$（$k_1>1$ をみたす整数の組）の MPL $Li_{k1\cdots kr}(z)$は

$$Li_{k1\cdots kr}(z)= \Sigma z^{n1}/n_1^{k1}\ldots n_r^{kr}$$

と級数として定義されるが（和は $0<n1<\ldots<nr$ をみたす正整数全体を亘る），それが**反復積分**表示されることが，コンツエヴィッチにより示されている．それによると，指数$(k_1,\ldots,k_r)$に対して二つの１形式

$$\xi_0= dz/z,\ \xi_1= dz/1-z$$

からなる語（word）$w=\xi_\alpha\cdots\xi_\beta$（ただし，最後の文字は常に$\xi_1$とする）が対応して，この語に対する反復積分

$$\int \xi_\alpha\cdots\xi_\beta$$

（積分の下端は０，上端は z）として，MPL $Li_{k1\cdots kr}(z)$が表示できる．そこで，これを

$$Li(w;z)$$

と表すことにする．このように，最後がξ_1で終わる語が張る**非可換多項式環**を S_1, この制約のない語が張る多項式環を S，ξ_0で始まりξ_1で終わる語が張る多項式環を S_{10} で表す．S_{10} に属する語 w に対して，**多重ゼータ値** を

$$\zeta(w) = Li(w;1) = \Sigma\ 1/n_1^{k1}\ldots n_r^{kr}$$

で定義する．また，$Li(w;z)$は S に属する語 w に対しても適切に拡張できることに注意しておく．
語 $w=\xi_\alpha\cdots\xi_\beta$ に対して，その**双対語**（dual word）$\tau(w)$ を文字の順番を逆転させ，しかも，0 と 1 を入れ替えたものとして定義する．例えば，

$$w = \xi_0\xi_0\xi_1$$

の双対語は

$$\tau(w)= \xi_0\xi_1\xi_1$$

である．これらの記号を使えば，$Li(w;z)$と$Li(\tau(w);1-z)$ に対する**反転公式**は

$$\Sigma Li(\tau(u);1-z)\ Li(v;z) = \zeta(reg^{10}(w))$$

という形をとる．ここで和は，$w=uv$ をみたす語 u,v を亘る．reg^{10} は S から S^{10} への射影であり，$\zeta(reg^{10}(w))$は語 w に対する正則化された多重ゼータ値である．この反転公式の帰結として，多重ゼータ値に関する**双対関係式**

$$\zeta(reg^{10}(w))= \zeta(reg^{10}(\tau(w)))$$

が得られることに注意する．この反転公式は polylogarithm $Li_k(z)$ のときと同じく，加法的かつ再帰的なリーマン・ヒルベルト問題と見なすことができる．そして，次の定理１を示すことができる．

定理１
この加法的・再帰的リーマン・ヒルベルト問題は$Li(w;z)$の $z\to\infty$における漸近的な性質を仮定することで，一意可解である．

③この定理がどのように **KZ 方程式**の基本解に対するリーマン・ヒルベルト問題と関連するのかを述べる．
１変数 KZ 方程式とは**モジュライ空間** $M_{04}=\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$上の確定特異点型微分方程式であり，

$$dG = (\xi_0X_0 + \xi_1X_1)\ G$$

と定義される．特異点は 0, 1, ∞である．z=0

において正規化された基本解 $L^{(0)}(z)$ とは，

$$L^{(0)}(z)=K^{(0)}(z)z^{X0}$$

の形の解である．ここで，$K^{(0)}(z)$ は z=0 の近傍で正則で $K^{(0)}(0)=\mathbf{I}$，X0 とは X_0 のことである．また，z=1 において正規化された基本解 $L^{(1)}(z)$ とは，

$$L^{(1)}(z)=K^{(1)}(z)(1-z)^{-X1}$$

の形の解である．ここで，$K^{(1)}(z)$ は z=1 の近傍で正則で $K^{(1)}(1)=\mathbf{I}$，X1 とは X_1 のことである．

これらの関数は**非可換形式的冪級数環**

$$U=C\langle\langle X0,X1\rangle\rangle$$

の要素として考えている．これは**ホップ代数**になっている．また，非可換多項式環 S は**シャッフル積**をもつホップ代数になる．シャッフル積は可換な積を定めることに注意．二つのホップ代数は互いに他の双対になっている．

定理２(奥田‐上野)

(1) z=0 で正規化された基本解 $L^{(0)}(z)$ は

$$L^{(0)}(z)= \sum Li(w;z)W$$

と表示できる．和は S に属する語に亘り，W は w に対応する X_0，X_1 の語である．この級数は U の**群的要素**である．

(2) z=1 で正規化された基本解 $L^{(1)}(z)$ は

$$L^{(1)}(z)= \sum Li(w;1-z)t_*(W)$$

と表示できる．t_* は

$$t_*(X_0)=-X_1,\ t_*(X_1)=-X_0$$

をみたす U の自己同型である．この要素も群的要素である．

(3) ドリンフェルト結合子 Φ_{KZ} を

$$\Phi_{KZ} = \sum \zeta(\mathrm{reg}^{10}(w))W$$

で定義する．これも群的要素であり，

$$L^{(0)}(z)= L^{(1)}(z)\ \Phi_{KZ}$$

が成立する．これを二つの基本解の**接続関係式**という．

基本解に対する接続関係式を語 w について書き下したものが MPL に対する反転公式なのである．そこで，これを逆に**乗法的リーマン．ヒルベルト問題**と見なして

$$F^{(0)}(z)= F^{(1)}(z)\ \Phi_{KZ} \qquad (*)$$

をみたす関数 $F^{(0)}(z)$，$F^{(1)}(z)$ を求めることを考えよう．ただし，

$$F^{(0)}(z)= \sum f^{(0)}(w;z)W,$$
$$F^{(1)}(z)= \sum f^{(1)}(w;z)t_*(W),$$

であり，これらは U の群的要素とする．$f^{(0)}(z)$ は領域 D_0（複素平面から実軸の１以上の半直線を除いて得られる領域）で正則，$f^{(1)}(z)$ は領域 D_1（複素平面から実軸の 0 以下の半直線を除いて得られる領域）で正則とする．こうすると，乗法的関係式(*) は，加法的かつ再帰的リーマン・ヒルベルト問題

$$\sum f^{(1)}(\tau(u);z)f^{(0)}(v;z)= \zeta(\mathrm{reg}^{10}(w)) \quad (\#)$$

と同値である．ここで，和は w=uv をみたす語 u,v 全体を亘る．$F^{(i)}(z)$ が群的要素ということと $f^{(i)}(w;z)$ が w のシャッフル積について準同型であることは同値であることに注意する．次の定理が証明できる．

定理４　準同型 $f^{(i)}(w;z)$ が初期的条件

$$f^{(0)}(\xi_0;z)=\log z,$$
$$f^{(1)}(\xi_1;z)=\log(1-z)$$

をみたし，漸近的条件

$$\{f^{(i)}(w;z)\}' \to 0 \quad (z \to\infty \ \text{ in } Di)$$

と正規化条件

$$f^{(0)}(w;0)=0$$

（ただし，w は S_{10} の語である）をみたすとする．このとき，

$$f^{(0)}(w;z)=Li(w;z)$$
$$f^{(1)}(w;z)=Li(w;1-z)$$

である．

これが我々の成果論文「Fundamental solutions of the Knizhnik-Zamolodchikov equation of one variabl and the Riemann-Hilbert problem」(大井周氏との共著，現在投稿中)における主定理である．

定理４に対応する乗法的リーマン・ヒルベルト問題は次の定理で与えられる．

定理５ $F^{(0)}(z)$，$F^{(1)}(z)$ は群的要素で，

$$F^{(0)}(z)= (1-z)^{-X1}K^{(0)}(z)z^{X0}$$
$$F^{(1)}(z)= z^{X0}K^{(1)}(z)(1-z)^{-X1}$$

という形をした級数で，$K^{(i)}(z)$ は

$$K^{(i)}(z)=\sum g^{(i)}(w;z)W$$

と展開されるものとする．ただし，

$g^{(i)}(w;z)$　は領域 D_i で正則とする．さらに乗法的リーマン・ヒルベルト問題

$$F^{(0)}(z)= F^{(1)}(z)\ \Phi_{KZ} \qquad (*)$$

をみたすものを考える．ただし，無限遠方における漸近条件

$$\{K^{(i)}(z)\}' \to 0 \ (z \to\infty \ \text{ in } D_i)$$

と正規化条件

$$K^{(0)}(0)=\mathbf{I}$$

をみたすものとする．このような条件をみたす無限級数は唯一つ存在する．

⑤　以上の成果は１変数 KZ 方程式のモノドロミー構造に関するものである．当初の予定では，これを２変数 KZ 方程式にまで一般化する予定であったが，それを果たすことができなかった．しかし，２変数 KZ 方程式を特別の場合として含むような**モノドロミー保存変形**の枠組みを見出して，その正則解について考察することができた．その成果は２０１５年９月の日本数学会秋季総合分科会（京都産業大学）と２０１６年３月の日本数学会

年会（筑波大学）で発表した．
それはつぎのようなものである．
２変数 KZ 方程式（これを **2KZ** とする）に付随した**モノドロミー保存変形**（これを **2MPD** とする）を考える．

L_z = (X/z + Y/1-z + wZ/1-zw)L
L_w = (X^1/w + Y^1/1-w +zZ/1-zw) L

ただし，X^1，Y^1 は定数行列，X=X(w),Y=Y(w),Z=Z(w)は変数 w の行列値関数である．2MPD は定数行列 X^1，Y^1 に応じて決まっている．この連立系の積分可能条件を取ると，つぎの非線形微分方程式（2MPD に対する**変形方程式**といい，**1DE** と記す）を得る．

X_w = [X^1/w + Y^1/1-w, X]
Y_w = [X^1/w+(Y^1+Z)/1-w, Y]
Z_w = [(X^1-X+Y)/w + (Y^1+Y)/1-w, Z]

1DE は，X^1，Y^1 の随伴表現によって決まる．
2 件の学会発表の主定理はつぎの通り．

定理６(1) 定数行列 X_0，Y_0，Z_0 が条件
[X_0,X^1]=[Y_0,X^1]=[X^1-X_0+Y_0,Z_0]=0
をみたし，さらに，任意の正整数 k に対し，
kI − ad(X_0)，kI − ad(X^1-X_0+Y_0)
が可逆であるとする．このとき，初期値を X_0，Y_0，Z_0 とする 1DE の原点 w=0 で正則な解 X(w)，Y(w)，Z(w)が一意的に存在する．
(2) 定数行列 X_0，Y_0，Z_0 は(1)の条件をみたしているとする．このとき，初期値を X_0，Y_0，Z_0 とする原点 w=0 で正則な 1DE の解が定数解であるための必要十分条件は，それらが
[X_0,Y^1]=[Y_0,Y^1+Z_0]=[Y_0+Y^1,Z_0]=0
をみたすことである．(1)，(2)の条件を合わせたものは 2KZ の積分可能条件に他ならない．

発表では，この他に，2DE の正則解，２重対数関数を含む 1DE の特殊解について述べた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２　件）
⑴（査読中）
Shu Oi and Kimio Ueno, Fundamental solutions of the Knizhnik-Zamolodchikov equation of one variable and the Riemann-Hilbert problem.
⑵（査読あり）
Shu Oi and Kimio Ueno, The inversion formula of polylogarithms and the Riemann-Hilbert problem, Symmetries, Integrable Systems and representation, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vo. 40, Springer (2013), 491-496.

〔学会発表〕（計　３　件）．

① 上野喜三雄，２０１６年3月１８日，日本数学会年会（筑波大学），KZ 方程式に付随したモノドロミー保存変形の正則解について．
② 上野喜三雄，２０１５年9月１４日，日本数学会秋季総合分科会，２重対数関数とモノドロミー保存変形
③ Kimio Ueno and Shu Oi，２０１３年５月２８日～５月３０日 Global invariants and moduli spaces，（KIAS,Seoul,Korea），
KZ equation on the moduli space M_{0,n} and the Riemann-Hilbert problem.

〔図書〕（計　０　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
上野喜三雄（UENO KIMIO）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70160190

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：

.