

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 26 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400056

研究課題名(和文) 正標数の3次元Calabi-Yau多様体とその周辺の研究

研究課題名(英文) Calabi-Yau threefolds in positive characteristic and related problems

研究代表者

高山 幸秀 (Takayama, Yukihide)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：20247810

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：広門正行氏が1999年に発表したものやStefan Schroerer氏が2003年に発表したnon-liftableなCalabi-Yau 3-fold, より一般にピカル群がp-torsionを持たない場合などについて、ある種の弱い意味で1次コホモロジーの小平消滅定理が成立することを示した。また、Arnaud Beauville氏のアイデアを使って、奇数次の単連結でないCalabi-Yau多様体の構成法を示し、Stefan Schroerer氏の例から単連結でないnon-liftableなCalabi-Yau 3-foldの例を構成した。

研究成果の概要(英文)：I proved that a Kodaira type vanishing theorem for the first cohomology holds for non-liftable Calabi-Yau threefolds in positive characteristic for the existing examples such as the Hirokado's example in 1999 and the Schroerer's example of 2003. Moreover, it is proved that this kind of vanishing holds for Calabi-Yau 3-folds with no p-torsion in the Picard varieties. Also I constructed a non-simply connected non-liftable Calabi-Yau threefold in positive characteristic. This example is produced from the Schroerer's example using a method inspired by an idea of Arnaud Beauville.

研究分野：代数幾何

キーワード：Calabi-Yau多様体 正標数 小平消滅定理 持ち上げ可能性

1. 研究開始当初の背景

正標数の Calabi-Yau 多様体のうち、1次元の楕円曲線と2次元の K3 曲面については、標数零への持ち上げが存在することが P. Deligne らによって知られているが、3次元の場合は1999年に広門正行氏、持ち上げ不可能な3次元 Calabi-Yau 多様体(以下 CY3-fold)の例を示し、以後、広門・斉藤夏雄・伊藤浩行、S.Schroerer, C.Cynk-D.v.Straten, M.Schuette- S.Cynk, T. Ekedahl らによって、いくつかの例が発見されている。「全ての標数について持ち上げ可能な CY3-fold は存在するか?」という open problem に対し、広門らのグループや Schroerer による例では、標数 2 と 3 であり、van Straten, Cynk, Schuette らによる方法では、かなり大きな標数の例が構成できるものの、スキームになるのは標数 7 までで、それ以上の標数では代数空間になってしまう。すなわち、大きな標数に関して、この問題は未解決なままである。

一方、正標数の代数幾何学の病理現象の一つとして、小平消滅定理の反例の存在がある。これは丹後弘司氏が発見した丹後構造をもとに、P.Raynaud が代数曲面での反例を、さらに向井茂氏がその方法を拡張して一般次元での反例構成法を示したが、それ以外の方法も単発的にいくつか知られている。また、P.Deligne と L.Illusie の有名な結果により、2次元の Witt ベクトル環への持ち上げが可能な標数 3 以上の CY3-fold は、小平消滅定理が成り立つことが知られている。さらに、双有理幾何学で有用な、小平消滅定理の簡単な拡張である川又-フィーベックの消滅定理が正標数でどこまで成立するかについては、Q.Xie の一連の研究によって調べられている。

しかしながら、Ekedahl により、広門正行の1999年の例と S.Schroerer の例は、2次元 Witt 環への持ち上げが不可能な事が知られている。2次元 Witt 環への持ち上げが不可能であっても、小平消滅が成立する代数曲面の例が知られているため、広門氏や Schroerer 氏の例において、小平消滅定理、あるいは川又-フィーベック消滅定理が成り立つかどうかは、全く不明であった。

Kollar 氏によって、1次元コホモロジーにおける小平消滅定理の反例となる代数多様体は uniruled であるものに限定されることが知られており、広門氏や Schroerer 氏の例もやはり uniruled であるため、小平消滅が成り立たない可能性は残されている状態であった。

1次元および2次元の Calabi-Yau 多様体である楕円曲線や K3 曲面については、標数ゼロの場合も正標数の場合も非常に活発な研究が行われており、まさに日進月歩といった様相を帯びている。3次元 Calabi-Yau 多様体に関しては、主に数理論理学のミラー対称性に関連したことから、複素数体上の CY3-fold の研究が非常に活発に行われている。また、数論と関連して有理数体上のモジ

ュラ-CY3-fold の研究も割合盛んに行われている。しかしながら、正標数の K3 曲面の研究の次に来るものと位置づけることができる正標数の CY3-fold に関しては、例えば K3 曲面の(クリスタリン)トレリ型定理に相当する強力な道具が無いこともあって、non-liftable な例などの単発的な研究しか行われていない状態である。

2. 研究の目的

正標数の代数幾何学では、標数零の場合と同様のことがどこまで成り立つか? という観点のものは密着閉理論を中心とした可換環論の分野、さらに最近では、高次元双有理幾何学の極小モデル理論の分野でも盛んに研究されている。本研究の目的はそれらとは異なり正標数特有の現象の解明を目指すものである。特に、持ち上げ不可能な CY3-fold と小平消滅定理の反例という観点に重点を置いて調べていくことを目的とした。

これは言い換えれば、有限次 Witt 環への持ち上げと(無限時)Witt 環への持ち上げの間の関係を調べるという変形理論の観点から正標数の CY3-fold を調べるわけだが、それに伴って興味深い CY3-fold の構成方法を模索することも大きな目的である。特に、non-liftable な CY3-fold の例は散発的にしか知られていないので、新しい具体例を構成し、それを調べることによって、新しい知見が得られると期待できる。

3. 研究の方法

既に知られている持ち上げ不可能な CY3-fold について、(1) uniruled 性、2次元 Witt ベクトル環への持ち上げ可能性、de Rham-Hodge コホモロジーの計算など、未解明の諸性質を調べること、(2) 持ち上げ不可能な CY3-fold の新しい例の構成法を模索すること、(3) 持ち上げ不可能な CY3-fold について、小平消滅がどこまで成り立つか調べる、の3つの方向性から検討していく。

これら3つのことを追求するために、群スキームのスキームへの作用と商スキーム、代数的基本群、エタール and/or クリスタリンコホモロジーといった古典的理論や、広門・伊藤、斉藤、Schroerer, Ekedahl, Cynk, van Straten 氏らの構成した具体例を、詳しく再検討しながら考察を進める。

また、代数多様体の構成方法や構造の研究、双有理幾何学における正標数版森プログラム、(正標数の) K3 曲面やエンリケス曲面の研究といった、隣接分野の最新の研究動向から新しいヒントが得られないかを模索する。そのために、海外を含めた研究集會に積極的に参加し、情報収集に努める。

4. 研究成果

まず、向井茂氏が小平消滅定理の反例が存

在しうる曲面を、Bombieri-Mumford の分類定理に基づいて調べた方法に触発され、1次元コホモロジーの小平消滅定理の反例が存在した場合、コホモロジーの次数の下限の評価式を与えた。これには2次チャーン類の評価式が必要だが、そのために宮岡洋一氏が標数ゼロのCalabi-Yau多様体に対して示した、2次チャーン類の非負性定理の正標数版を考えた。証明は宮岡氏が標数ゼロに対して行ったものと類似の方針で行ったが、宮岡氏の証明では正標数では一般に成り立たないBogomolov-Gieseker不等式が使われているので、その代わりに、強(半)安定ベクトル束に関するA. Langer氏による類似の不等式を用いた。そのため、接ベクトルバンドルのHarder-Narasimhan filtrationに関するある強い条件を付け加える必要があり、小平消滅の反例が存在した場合のコホモロジーの次数の評価も、この条件を前提としたものになってしまった。この結果に関しては、後にA. Langer氏がある種の拡張された結果を得たようである。

広門正行氏が1999年に発表したものやStefan Schroerer氏が2003年に発表したnon-liftableなCalabi-Yau 3-foldにおいて小平消滅定理が成り立つか?という問題に対して一定の進展があった。すなわち、大域的1形式が自明なものに限られる場合は、 p 冪が非自明な大域切断を持つような豊富因子に対して1次コホモロジーについての小平消滅が成り立つ。 p 冪の大域切断についての条件は、例えばGodeaux曲面の例を考えると、一般には必要かと思われるが、CY3-foldの場合に外せる条件かどうかについては、今のところは不明である。また、3-foldの場合、2次コホモロジーに関する小平消滅も考えなければならないが、それについては全く手がかりが得られておらず、今後の課題として残ってしまった。 p 冪の大域切断に関する条件付きの小平消滅を弱小平消滅と呼ぶことにした。

弱小平消滅が成立するための条件として、G.van der Geer氏と桂利行氏の10年ほど前の研究結果、および、小田忠雄氏のde RhamコホモロジーとDieudonné加群についての50年ほど前の研究成果、さらに、W.E.Lang氏とN.O.Nygaard氏による20数年前の研究成果を組み合わせることによって、3次元以上のCalabi-Yau多様体に関して、大域的1形式を持たないことと、ピカル群が p -torsionを持たないことが同値であることを示した。

また、Arnaud Beauville氏が複素数体上のCalabi-Yau3-foldで基本群が非アーベル群になる例を構成した際に用いたアイデアを正標数の一般次元のCalabi-Yau多様体に対して定式化し、それを使って、奇数次の単連結でないCalabi-Yau多様体の構成法を示し、Stefan Schroerer氏の例から単連結でないnon-liftableなCalabi-Yau 3-foldの例を構成した。多様体に自由に作用する群を見

つけるのは一般に難しい。また、この場合、商多様体は特異点を持ってしまい、特異点解消が必要になるが、その制御は難しい。すなわち、特異点解消によって期待するものとは異なる多様体が出来てしまうことがあるからである。残念ながら、今回の研究ではこの問題に踏み込むことはできなかった。しかしながら我々はLiebermannのinvolutionという位数2の特殊な群作用を使って自由な群作用を構成し、基本群が2次巡回群であるnon-liftableなCalabi-Yau3-foldの構成に成功した。Schroerer氏の例に対して、それ以外の自由な群作用が存在するのか、あるいは、Schroerer氏の例以外のもの、例えば、広門氏の構成した例に対して、何らかの群作用を考えて、新しいnon-liftableなCY3-foldを構成することができるか?といった問題は、将来の課題として残ってしまった。また、この方法は、エタール射によるベッチ数の振る舞いを調べ、3次ベッチ数がゼロになるという性質が保存されることを使って新たなnon-liftableなCalabi-Yau3-foldを構成するというアイデアだが、D. van Straten氏とS.Cynk氏らによるnon-liftable CY3-foldは、3次ベッチ数はゼロではなく、それ以外の理由でnon-liftableになっているが、その性質がエタール射で保存されるか?といった問題についても、今後の課題として残ってしまった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

Yukihide Takayama, On Kodaira type vanishing for Calabi-Yau threefolds in positive characteristic, to appear in *Beitraege zur Algebra und Geometrie* (オンライン版 25 January 2015) 査読有り DOI 10.1007/s13366-015-0235-9

Yukihide Takayama, Kodaira Type Vanishing Theorem for the Hirokado variety, *Comm. Algebra* 42 (2014) no.11 4744—4750 査読有り DOI 10.1080/00927872.2013.823546

[学会発表](計0件)

[その他]
ホームページ等

Yukihide Takayama, An Example of non-simply connected non-liftable Calabi-Yau 3-fold in positive characteristic, arXiv:1506.08357 (プレプリントサーバー)

6 . 研究組織

(1)研究代表者

高山 幸秀 (TAKAYAMA, Yukihide)
立命館大学・理工学部・教授

研究者番号 : 20247810