2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２８　年　　６　月　１５　日現在

機関番号：３４４１６

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2013～2015

課題番号：２５４０００５７

研究課題名（和文）組合せ論的位相幾何学の新しい手法の可換代数への応用

研究課題名（英文）Application of New Methods of Combinatorial Topology to Commutative Algebra

研究代表者

柳川　浩二（Yanagawa, Kohji）

関西大学・システム理工学部・教授

研究者番号：４０２８３００６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：スペインやアメリカの研究者と共同で，多項式環の単項式イデアルによる剰余環のLyubeznik 数を研究した。たとえば，polarization は，この不変量を実質的に保つことを示した。また，村井聡氏(大阪大学)と共同で，旗複体の cd-指数の研究に，squarefree 加群の理論を応用した。さらに，岡崎亮太氏(福岡教育大学)と共同で，単項式イデアルの胞体的自由分解について研究し，アファイン有向マトロイドへの応用を模索した。

研究成果の概要（英文）：With Spanish and American coauthors, I studied the Lyubeznik numbers of the quotient rings of polynomial rings by monomial ideals. For example, we showed that the procedure of "polarization" essentially preserves this invariant. With Prof. S. Murai, I studied the "cd-index" of flag complexes using the notion of squarefree modules. I also studied cellular free resolutions of monomial ideals with Prof. R. Okazaki. We applied this method to the study of affine oriented matroids.

研究分野：数物系科学

キーワード：組合せ論的可換代数　単項式イデアル　Lyubeznik 数　極小自由分解　CW胞体　有向マトロイド

１．研究開始当初の背景
代表者は 15・6 年前，**組合せ論的可換代数**の研究に，**導来圏**や**構成可能層**を用いる手法を開発した。これは，当時としては画期的なアイデアであり，導入した概念の一部は，当該分野の基本的な道具として，ある程度は定着している。しかし，この概念「それ自体」の研究は，比較的早くに行き詰ってしまい，以後暫く，新たな方向性の模索が続いた。
　その後，
(a) 組合せ論的位相幾何学寄りに，研究主題・手法の重心を移す。
(b) 若い研究者と積極的に共同研究を行い，一度は行き詰っていた題材に，新たなアイデアを持ち込む。

という基本方針が功を奏し，状況が好転してきた時期に，当該研究課題は始まった。
基本的に，今回の課題は，代表者の平成 22～24 年度に採択されていた課題『組合せ論的可換代数への導来圏や位相幾何学的手法の応用』からのごく自然な発展であり，今回の研究期間の前半で扱った問題は，前の課題からの「宿題」の面が大きい。

２．研究の目的
上述の通り，代表者は 15・6 年前，組合せ論的可換代数の研究にホモロジー代数的手法を組織的に応用する枠組みを開発した。以後，多少の曲折は有ったが，この手法を応用して良い結果を出すこと，あるいは，そうした応用を通して，手法自体を洗練させていくことを，研究の基本的な指針としてきた。今回も，特定の問題に固執し過ぎず，自分の手法が有効に活用できるものを探しながら，柔軟に対応していく予定であった。
例えば，「単項式イデアルの**極小自由分解の胞体性**」は研究期間全体を通じて主要なテーマの一つであったが，当初は，その直前の研究の流れから Borel fixed ideal を扱っていた。しかし，研究期間の後半には，**アファイン有向マトロイド**との関連に興味が移った。ただし，極小自由分解の胞体性のより高度な応用という意味では一貫している。

３．研究の方法
数学という分野の一般的傾向として， 研究内容と研究方法は表裏一体であり，内容面でここに特記することは少ない。ただ，研究期間の中盤以降は，旗複体の **cd-指数**や上述した有向マトロイドなど，新しい概念を勉強しながら，その題材に，これまで培ってきた手法でアプローチする，という傾向がより強まったと言える。
また，研究を実際に進めていくに当たり，関連する話題の研究者との意見交換は積極的に行った。論文を幾つか共同執筆した岡崎亮太氏(福岡教育大学) とは特に緊密に連絡を取った他， 海外の研究者との共同研究も幾つか行った。

４．研究成果
まず，Josep Àlvarez Montaner 氏（カタルーニャ工科大学）らとの共同で行った単項式イデアルによる剰余環(実質的に，Stanley-Reisner 環)の Lyubeznik 数の研究について述べる。
 Lyubeznik 数は，90 年代に G. Lyubeznik によって定義された不変量だが，無限生成かつ非アルティンな加群を経由して定義される為，扱いは難しく，一般には *D*-加群の理論等を用いて研究される。ただし，Stanley-Reisner 環の場合は，代表者が，
比較的簡単に計算する方法を発見していた(2001 年)。その後，代表者自身はこの話題から離れ，他の研究者からの目立った引用も無かったが，数年前 Àlvarez Montaner 氏らが本格的な改良を始めた。この流れに，「本家」である代表者が加わったのが，今回の共同研究であり，その成果は，氏との共著論文 “Lyubeznik numbers of local rings and linear strands of graded ideals”にまとめられた。
　かなり力を入れた論文だが，そのせいか細かな改良が繰り返されて完成が大幅に遅れ，現在も投稿中である。皮肉なことに，スピンオフ的な論文である，別グループとの共同研究 ② の方が先に出版された。これの主結果を紹介する為に，単項式イデアルの **polarization** の紹介から始める。

S を体上の多項式環とする。S の単項式イデアル I に対し，より変数の多い多項式環 T の被約な単項式イデアル pol(I)で，I と同じ(あるいは，「平行な」)ホモロジー代数的不変量を持つものが存在する。具体例で説明すると，S の単項式 x^2y^2z に T の単項式 $x_1x_2y_1y_2z_1$ を対応させることで pol(I) は構成される。<u>被約な</u>単項式イデアルは格段に扱い易い(Stanley-Reisner 環の理論)為，polarization は，組合せ論的可換代数の定石的な手法である。②の主定理は以下の通り。

I を S の単項式イデアル，pol(I) をその polarization とすると，S/I と $T/\mathrm{pol}(I)$ の Lyubeznik 数は「本質的に」等しい。(厳密には，$h:=\dim T - \dim S$ とした時， S/I の i 次の Lyubeznik 数が，$T/\mathrm{pol}(I)$ の $i+h$ 次のそれに対応し， 添え字のズレが生じるが，これがあるべき姿である。)

証明には， polarization を関手として扱った 代表者自身の 2012 年出版の結果，及び Ene-岡崎による似た傾向の結果が，効果的に用いられている。

次に，単項式イデアルの極小自由分解の胞体性に関して，岡崎亮太氏と行った共同研究について述べる。そもそも，胞体的な極小自由分解の研究は，90 年代半ばに D. Bayer や B. Sturmfels によって開始されたものである。

以後 20 年近く，研究の活発さと言う点では浮沈が有ったが，この 5･6 年は，Borel fixed ideal の **Eliahou-Kervaire 分解**が胞体的であることを示した J. Mermin や T. Clark の仕事を契機に再活性化しているかと思われる。
④では，Mermin らの結果を精密化し，剰余環が Cohen-Macaulay(以下，CM と略)の場合，Eliahou-Kervaire 分解の台を与える正則 CW 胞複体は 球と同相となることを示した。

岡崎氏との共同研究は，④の完成後，若干路線を変え，アファイン有向マトロイドに付随する単項式イデアルを扱った。
通常のマトロイドは，応用数学の重要な話題として広く認識されているが，「向き」(+-の符号)を含めて考える**有向マトロイド**も，やはり自然な概念である。抽象的な公理で定義されるものの，「位相的実現」を持ち，球面上の組合せ論的構造とみなせる。アファイン有向マトロイドは，これを半球で切り取った部分に相当し，超平面配置の抽象化と言える。アファイン有向マトロイドは，**有界複体**という正則 CW 胞複体(ごく平たく言えば「図形」)を与える。超平面配置の場合，「有界複体」という語感通りの胞複体に対応する。 Novik, Postnikov と Sturmfels は，アファイン有向マトロイドに付随した単項式イデアルを構成し，さらにその極小自由分解は胞体的で，有界複体を台とすることを示した(2002)。

岡崎氏との共著論文 “The Cohen-Macaulayness of the bounded complex of an affine oriented matroid”(投稿中)では，アファイン有向マトロイドに付随した単項式イデアルが何時 CM となるかを特徴づけ(組合せ論的に比較的自然な条件に対応する。Novik らの上述の論文に部分的な結果が与えられていたものを，完成させた)，さらに付随するイデアルが CM のとき，有界複体は可縮なホモロジー多様体であることを示した。
Dong の定理(超平面配置の場合，長らく **Zaslavsky 予想**として知られていたもの)との関連から言えば，上の状況で「有界複体は球と同相」まで言えるのが自然かと思われるが，現時点では証明できていない。
　この定理の証明でキーとなるのは，次の補題である。「単項式イデアル I の極小自由分解が，正則 CW 胞複体 X を台に持つとする。S/I が CM かつ X の次数付けが忠実(今回導入した概念だが，詳細は略)ならば， X は位相空間として CM である。」 ここで，忠実性の仮定を外しても反例は見つかっておらず，今後の課題と言える。さらにこの状況下で，X は球と同相になり易い傾向が見られるが，これには反例は存在し，球と同相となる為にどのような条件が効きそうかは，不明である。この点が見極められれば，有向マトロイドの研究に寄与するところが大きいかと思われ， 今後の進展が期待される。

次に，村井聡氏(大阪大学)との共著 ⑤ について述べる。旗複体(flag complex)とは，単体的複体の特殊なクラスであり，正則 CW 複体の重心細分が典型例である。旗複体の面の数え上げは， 一般の単体的複体には見られない，不思議な性質を持つ。この性質を効果的に表現するのが **cd-指数**である。これは，単体的複体の組合せ論の重要な話題の一つであるが，代表者は それまで扱った経験が無かった。⑤では，代表者が以前に導入した一般的な手法である **squarefree 加群**を、適宜カスタマイズして cd-指数の研究に応用した。この話題に関する既存の結果で，最も顕著なものは、Karu による非負性定理であるが、彼の証明を環論的に捉え直すことで、結果を精密化・一般化している。また，Karu が導入した道具やアイデアを，(少なくとも可換代数の研究者にとって)より使い勝手が良いものにアレンジしている面もあり，今後，今回導入した概念が，広く用いられることが期待される。
なお，⑤は，共著者側の主導権が強かった論文ではあるが，代表者が長年扱ってきた squarefree 加群およびその導来圏が主要テーマであり，これと，まさしく「組合せ論的位相幾何学の新しい手法」の一つである cd-指数の理論との融合を目指したもので，本研究課題の趣旨に極めてよく沿っていると言える。

　最後に，Lukas Katthän 氏(当時はオズナブリュック大学，現在はフランクフルト大学)との共著である ① について述べる。これは，他の論文とはやや異なり，組合せ論色が薄い。当初は，③ からの流れで，組合せ論的アプローチでアファイン半群環を研究する予定であったが，次第に議論が一般化されていったものである。

主定理を述べる。A を緩い条件を満たすネーター整域(たとえば，体上有限生成な整域)とし， ω_A をその標準加群，Bを Aの整閉包としたとき，次の 4 条件は同値である。
(i)　 A はセールの (R_1)条件を満たす。
(ii)　 ω_A は B の標準加群でもある。
(iii)　 ω_A は B 加群の構造を持つ。
(iv)　 ω_A の自己準同型環は B と同型。

アファイン半群環の場合，標準加群の組合せ論的な記述が知られているが，これを用いて，(この場合に特化した)他の同値条件も得られる。

上の定理から当然連想されるのは，可換環論において古典的な以下の二つの定理である。

(J.P. セール) ネーター環 A が正規である為の必要十分条件は，A が (R_1)条件 と (S_2)

条件を満たすことである。

(青山陽一) 標準加群 ω_A を持つネーター環 A に対し，A が(S_2)条件を満たす為の必要十分条件は ω_A の自己準同型環が A 自身と同型になることである。

A が正規とは，A の整閉包 B が A 自身と一致することであるので，Katthän 氏と代表者の結果は，上の二つの定理から ごく自然に想像できるものであるが，不思議なことに，これまで全く気付かれてなかった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　6 件）

① Lukas Katthän, and Kohji Yamagawa, "A Canonical module characterization of Serre's (R_1)", Communications in Algebra, 査読有，掲載決定

② Arindam Banerjee, Luis Núñez-Betancourt, and Kohji Yanagawa, "Properties of Lyubeznik numbers under localization and polarization", Journal of Pure and Applied Algebra, 査読有, Vol. 219, 2015, pp. 4872–4888.

③ Kohji Yanagawa, "Dualizing complexes of seminormal affine semigroup rings and toric face rings", Journal of Algebra, 査読有, Vol. 425, 2015, pp. 367–391.

④ Okazaki Ryota and Kohji Yanagawa. "On CW complexes supporting Eliahou-Kervaire type resolutions of Borel fixed ideals", Collectanea Mathematica, 査読有, Vol. 66, 2015, pp. 125–147.

⑤ Satoshi Murai and Kohji Yanagawa, "Squarefree P-modules and the **cd** -index", Advances in Mathematics, 査読有, Vol. 265, 2014, pp. 241–279.

⑥ Josep Àlvarez Montaner, and Kohji Yanagawa, "Addendum to "Frobenius and Cartier algebras of Stanley-Reisner rings" [J. Algebra 358 (2012) 162–177]", Journal of Algebra, 査読有, Vol. 414, 2014, pp.300–304.

〔学会発表〕（計　5 件）

① Kohji Yanagawa, "Lyubeznik numbers of local rings and linear strands of graded ideals", International Conference and 8th Japan-Vietnam joint Seminar on Commutative Algebra, 2016 年 3 月 16 日, Ha Long, Vietnam

② 岡崎　亮太，柳川　浩二，"The Cohen-Macaulayness of the bounded complex of an affine oriented matroid", 第 37 回可換環論シンポジウム, 2015 年 11 月 18 日, 倉敷シーサイドホテル（岡山）

③ 岡崎亮太, 柳川 浩二, "アフィン有向マトロイドの bounded complex の Cohen-Macaulay 性とマトロイド・イデアルの Cohen-Macaulay 性", 日本数学会 秋季総合分科会，2015 年 9 月 13 日，京都産業大学

④ Kohji Yanagawa, " Lyubeznik numbers of local rings and linear strands of graded ideals ", 第 36 回可換環論シンポジウム,2014 年 11 月 24 日，湘南国際村生産性国際交流センター （神奈川）

⑤ 村井聡，柳川 浩二，" 多面体的複体の flag f-列について "，2014 年 3 月 15 日，日本数学会 2014 年度年会，学習院大学

６．研究組織
(1)研究代表者
柳川 浩二　　（YANAGAWA, Kohji）
関西大学・システム理工学部・教授
研究者番号： 40283006