

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 9 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400060

研究課題名(和文) 超平面配置や二次曲線配置の実構造を使った研究

研究課題名(英文) Arrangements of hyperplanes and conics via real structures

研究代表者

吉永 正彦 (YOSHINAGA, Masahiko)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：90467647

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：超平面配置の位相的・組合せ論的構造の研究を行った。位相的構造に関しては、ミルナーファイバーのコホモロジーのモノドロミー作用を実構造を使って記述する公式に基づき、あるクラスの直線配置に関してはモノドロミーが自明となる事を示した。また、ミルナーファイバーのモノドロミーと密接に関連していると予想されている、青本複体のコホモロジーの記述を行った。格子点の数え上げ理論を援用することにより、ルート系のLinial配置の特性準多項式を、基本アルコブのEhrhart準多項式及びオイラー多項式を用いて記述し、未解決問題に応用した。

研究成果の概要(英文)：We studied topological and combinatorial aspects of hyperplane arrangements. As topological aspects, we focused on Milnor fibers of hyperplane arrangements. Based on the formula describing the cohomology of Milnor fiber using real structure, we obtained certain vanishing of non-trivial monodromy. We also studied the characteristic quasi-polynomials of Linial arrangements associated to a root system in terms of Ehrhart theory.

研究分野：幾何学、組合せ論

キーワード：超平面配置 ミルナーファイバー オイラー多項式

1. 研究開始当初の背景

ベクトル空間や射影空間の余次元 1 の部分空間の集まりである超平面配置は組みひも群やルート系との関係で古くから研究されてきた。トポロジーや組合せ論に関連した多くの問題が、超平面配置の枠組みで定式化できることが知られている。

超平面配置に対して、自然に空間のストラティフィケーションが定まる。このストラティフィケーションの離散的なデータを抽出したものは交叉半順序集合と呼ばれている。交叉半順序集合は様々な情報を持っていることが知られている。例えば、Orlik-Solomon によって示された事実として、複素超平面配置の補集合のベッチ数(さらに強く、コホモロジー環)は交叉半順序集合から決定できることが知られている。Orlik-Solomon の研究の後、交叉半順序集合と様々な幾何学的不変量と交叉半順序集合の関係が調べられている。一方で、1996 年に Rybnikov によって提出された例によって、複素超平面配置の補集合のホモトピー型は、交叉半順序集合からは決定できないことが明らかになっている。コホモロジー環とホモトピー型の間で、どこまで交叉半順序集合により決定できるかという問題が、中心課題である。

また、代数的な側面としては、超平面配置から定まる対数的ベクトル場の加群が様々な視点から研究されている。寺尾宏明の研究により開拓された自由超平面配置の理論は特に成功をおさめ、組合せ論と代数(代数幾何)をつなぐ役割を果たしている。Edelman-Reiner によって予想された、ルート系の Catalan 配置、Shi 配置の自由性は、代数幾何的な翻訳をすることで解決された。特に、Shi 配置の自由性は、その特性多項式の明示的公式や Chamber 数の決定など、組合せ論的にも非自明な結論をもたらした。また、Shi 配置の近縁の Linial 配置は、自由配置ではないが、特性多項式の零点分布に関して興味深い現象が Postnikov-Stanley により予想されている。

2. 研究の目的

背景で述べたように、超平面配置の位相的構造のどこまでが交叉半順序集合で決定できるか、という問題が中心課題であるのだが、決定可能/不可能の境界に位置すると目されている、超平面配置のミルナーファイバーのコホモロジーに焦点をあてる。ミルナーファイバーのコホモロジーとそのモノドロミー作用は、多くの分野との関わりを持つ重要なテーマである(基本群の Fox calculus, Alexander 多項式、捩れコホモロジー、平面曲線の数え上げ、ホッジ構造等)。現時点ではまだ予想ではあるが、超平面配置のミルナーファイバーの一次のコホモロジーのモノドロミー作用の記述に関しては、有限体係数

の青本複体のコホモロジーを介して、「多重ネット」と呼ばれる交叉半順序集合の上の純粹に組合せ論的な構造により帰住されるであろう、というプログラムが Papadima と Suciu により提唱されている。本研究ではこのプログラムに沿って、超平面配置が実構造を持つ場合に、実構造を援用することで深く研究することを目的としている。

実構造は複素多様体の位相に大きな影響を持つことが知られているが、超平面配置を超えて、二次曲線配置に関しても、実構造を使った位相の研究をしたいと考えている。徳永浩雄等によって、最近、二次曲線配置の Zariski 対が多数構成されており、実構造を使った Zariski 対の研究を探る。

自由配置に関連して、背景でも述べたように、ルート系の Shi 配置の特性多項式等組合せ論的不変量の計算は、現時点では代数幾何的方法を経由してなされている。本来、ルート系の組合せ論的問題であるので、Shi 配置の特性多項式を計算できる程度にはその組合せ論的構造の分析をすすめることがのぞまれる。

3. 研究の方法

2000 年頃、Dimca-Papadima, Randell 等によって、複素超平面配置の補集合が「極小セル分割」と呼ばれる効率の良い CW 複体のホモトピー型を持つことが示されている。研究代表者はこれまで、超平面配置が実構造を持つ場合に、実構造を援用することにより、極小セル分割の構造を精密に記述する研究をすすめてきた。これまでに得られている極小セル分割の記述を使うことで、ミルナーファイバーの一次のコホモロジーのモノドロミー分解を計算するアルゴリズム(共鳴バンド法)を本研究の開始時点で得ている。このアルゴリズムを用いることで、多くの実例を計算し、実構造とミルナーファイバーのモノドロミーの関係を直接調べる。

ルート系の Shi 配置の特性多項式については、関連する Catalan 配置の特性多項式が Athanasiadis によって、組合せ論的に求められている。方法は余ウェイト格子の格子点の数え上げを用いている。この方向で、Shi 配置の特性多項式の計算を実行する。

4. 研究成果

ミルナーファイバーのモノドロミーに関しては、極小性の応用、または極小セル複体の記述に触発された議論により、いくつかの成果を得た。P. Baillet との共同研究では、直線配置に、重複度が高い点が一点しかない直線が存在する場合に、ミルナーファイバーの一次のコホモロジーへのモノドロミー作用が自明なることを証明した。これは以前から知られている Libgober の結果の一般化である。この結果の証明において、直線配置の

退化を、Orlik-Solomon 代数の代数的構造のレベルで捉える事が鍵となっている(退化写像)。技術的には、Orlik-Solomon 代数の退化写像を有効に使いこなせたことが大きく、退化写像自体が今後重要な役割を話すのではないかと考えている。M. Torielli との共同研究では、実構造を使って、有限体係数の青本複体の研究を行い、そのコホモロジーの実構造による記述を得た。応用として、「実 4 ネット」と呼ばれる直線配置の非存在を主張する Cordovil-Forge の結果の別証明を得た。

Shi 配置の特性多項式を Athanasiadis 流の格子点数の数え上げ理論により求める研究に関しては、当初の目標を超え、Linial 配置の特性多項式に関する多くの結果を得た。Linial 配置に関しては、(紙屋-竹村-寺尾)によって導入された、特性準多項式が重要な役割を果たすことが分かった。これは、多面体の格子点数え上げにおいて、多面体の超点の座標が有理数の場合には数え上げ関数が準多項式(Ehrhart 準多項式)となることに呼応している。本研究の成果として、Linial 配置の特性準多項式が、ルート系の基本アルコブの Ehrhart 準多項式と、(Lam-Postnikov により導入された)ルート系のオイラー多項式を使って記述されることが分かった。応用として、Postnikov-Stanley によって予想されていた、Linial 配置の特性多項式が満たす「関数等式」が証明された。また彼等の零点分布に関する予想に関しても、肯定的な部分結果が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

{ 雑誌論文 } (計 10 件)

1. M. Yoshinaga, Worpitzky partitions for root systems and characteristic quasi-polynomials. *Tohoku Mathematical Journal*. (査読有り, 印刷中)

2. H. Schenck, H. Terao and M. Yoshinaga, Logarithmic vector fields for curve configurations in \mathbb{P}^2 with quasihomogeneous singularities. *Math. Res. Letters*. (査読有り, 印刷中)

3. M. Torielli and M. Yoshinaga, Resonant bands, Aomoto complex, and real 4-nets. *Journal of Singularities*, 11 (2015) 33-51. (査読有り)
DOI: 10.5427/jsing.2015.11b

4. P. Bailet, M. Yoshinaga, Degeneration of Orlik-Solomon algebras and Milnor fibers of complex line arrangements. *Geometriae Dedicata*, 175 (2015) 49-56. (査読有り)
DOI: 10.1007/s10711-014-0027-7

5. S. Nazir and M. Torielli and M. Yoshinaga, On the admissibility of certain local system. *Topology and its applications*, 178 (2014) 288-299. (査読有り)
DOI: 10.1016/j.topol.2014.10.001

6. M. Yoshinaga, Resonant bands and local system cohomology groups for real line arrangements. *Vietnam Journal of Mathematics*, 42, 3, (2014) 377-392. (査読有り)
DOI: 10.1007/s10013-014-0086-y

7. H. Terao and M. Yoshinaga, 超平面配置に関する最近の話題. *数学*, 66 (2014) 157-179.
(査読有り)

8. M. Yoshinaga, Freeness of hyperplane arrangements and related topics. *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, (6) 23 no. 2 (2014), 483-512. (査読有り)
doi: 10.5802/afst.1413

9. M. Yoshinaga, Milnor fibers of real line arrangements. *Journal of Singularities*, 7 (2013), 220-237. (査読有り)
DOI: 10.5427/jsing.2013.71

10. T. Abe and M. Yoshinaga, Free arrangements and coefficients of characteristic polynomials. *Mathematische Zeitschrift*, 275 (2013) 911-919. (査読有り)
DOI 10.1007/s00209-013-1165-6

{ 学会発表 } (計 28 件)

1. M. Yoshinaga, Linial arrangements and Eulerian polynomials, Special Session on Topology and Combinatorics of Arrangements (in honor of Mike Falk), Spring Eastern Sectional Meeting State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, NY. (USA) March 19, 2016.

2. M. Yoshinaga, Euler characteristics in enumerative combinatorics, Colloquium, Universite de Bourgogne (Dijon, France), March 10, 2016

3. M. Yoshinaga, Euler characteristic reciprocity for chromatic and order polynomials, SINGULARITIES AND TOPOLOGY March 7-9, 2016, Nice (France).

4. M. Yoshinaga, Functorizations of

enumerative problems, Hokkaido University - KAIST (ASARC) Joint Workshop Algebra and Geometry, 6-8 January 2016, Hokkaido University. (北海道・札幌市)

5. M. Yoshinaga, Hyperplane arrangements and Eulerian polynomials, Computational Geometric Topology in Arrangement Theory, ICERM, 9 July 2015, Providence (USA)

6. M. Yoshinaga, 超平面配置とオイラー多項式, 幾何学・組合せ論に現れる環と代数構造, RIMS, 11 June 2015. (京都府・京都市)

7. M. Yoshinaga, 超平面配置とオイラー多項式, 代数セミナー, 5 June 2015, 広島大学 (広島県・東広島市)

8. M. Yoshinaga, 超平面配置の特性多項式, 広島大学談話会, 2 June 2015, 広島大学 (広島県・東広島市)

9. M. Yoshinaga, Milnor fibers of real line arrangements. Seminar in Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications, University of Bremen, 25 March 2015. プレーメン (ドイツ)

10. M. Yoshinaga, Milnor fibers of real line arrangements. Arrangements of plane curves and related problems, 18 March 2015, 首都大学東京. (東京都・八王子市)

11. M. Yoshinaga, Worpitzky partition, Eulerian polynomial and Liniel arrangements, 12 Feb. 2015, INdAM Intensive research period "Perspectives in Lie Theory", Scuola Normale Superiore, Pisa (Italy).

12. M. Yoshinaga, Primitive forms and the Kostant-Kirillov form, 25 Dec. 2014, Primitive Forms, Mirror Symmetry and Related Topics 2014, Kyoto University (京都府・京都市)

13. M. Yoshinaga, Zero recognitions for periods and holonomic numbers. Hokkaido University Seminar Series in VNU Hanoi University of Science, Hanoi, (Vietnam), 19 Dec. 2014.

14. M. Yoshinaga, 超平面配置と特性多項式. 2014 年度表現論シンポジウム, 夢海遊 淡路島 (兵庫県・洲本市) 26 Nov. 2014.

15. M. Yoshinaga, Minimal stratification for line arrangements and Milnor fibers.

城崎代数幾何シンポジウム, 城崎アートセンター, 24 Oct. 2014. (兵庫県・豊岡市)

16. M. Yoshinaga, Zero recognitions for periods and holonomic real numbers. The 1st Workshop of JSPS-MAE Sakura Program "Geometry and Combinatorics of Hyperplane Arrangements and Related Problems", Hokkaido University, 5 Sep. 2014. (北海道・札幌市)

17. M. Yoshinaga, Milnor fibers and semi-algebraic stratifications of real line arrangements. 代数幾何セミナー, 東北大学, 11 Jul. 2014 (宮城県・仙台市)

18. M. Yoshinaga, Milnor fibers and semi-algebraic stratifications of real line arrangements. 3 July 2014, Geometry Conference - Mathematics New Goals, National Cheng Kung University, Taiwan. 台南 (台湾)

19. M. Yoshinaga, Resonant bands, Aomoto complex, and Real 4-nets, Topology of arrangement of hyperplanes and hypersurface singularity, 東京理科大学(東京都・新宿区), 26 April, 2014.

20. M. Yoshinaga, Aomoto complex and S^4 -nets, 代数幾何学セミナー, 北海道大学, 14. April, 2014. (北海道・札幌市)

21. M. Yoshinaga, Milnor fibers of real line arrangements, NEW PERSPECTIVES IN HYPERPLANE AND REFLECTION ARRANGEMENTS, Bochum, 10 Feb., 2014 ポーフム (ドイツ)

22. M. Yoshinaga, Milnor fibers of real line arrangements, 離散群と双曲空間の複素解析とトポロジー, RIMS, 22 Jan., 2014 (京都府・京都市)

23. M. Yoshinaga, Milnor fibers of real line arrangements, The 1st Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, Nice, France, Sep 19, 2013. ニース (フランス)

24. M. Yoshinaga, Milnor fibers of real line arrangements, Combinatorial Methods in Topology and Algebra, Cortona, Italy, Sep. 11, 2013. コルトーナ (イタリア)

25. M. Yoshinaga, Milnor fibers and Cyclic Sieving Phenomenon, Seminario Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italy, Sep. 6, 2013. ピサ (イタリア)

26. M. Yoshinaga, Milnor fibers of real line arrangements, July 1, 2013, The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013, Sapporo Convention Center, 2013年7月1日(北海道・札幌市)

27. M. Yoshinaga, Milnor fibers of real line arrangements, June 27, 2013, Shanghai Jiao Tong University, The Second Pacific RIM Mathematical Association Congress. 上海(中国)

28. M. Yoshinaga, 実直線配置のミルナーファイバー, 代数学セミナー, 広島大学(広島県・東広島市), 2013年6月7日

〔図書〕(計1件)

吉永正彦, 周期と実数の 0-認識問題: Kontsevich-Zagier の予想. 問題・予想・原理の数学 2, 数学書房. 2016年 193pp

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~yoshinaga/jindex.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉永 正彦 (YOSHINAGA, Masahiko)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 90467647

(2) 研究分担者

寺尾 宏明 (TERAO, Hiroaki)
北海道大学・国際本部・特任教授
研究者番号: 90119058

(3) 連携研究者

徳永 浩雄 (TOKUNAGA, Hiro-o)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 30211395