様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：１２６１１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：２５４０００６５

研究課題名（和文）全複素部分多様体の四元数複素微分幾何学

研究課題名（英文）The quaternionic holomorphic differential geometry of totally complex submanifolds

研究代表者

塚田　和美（TSUKADA, KAZUMI）

お茶の水女子大学・基幹研究院・教授

研究者番号：３０１６３７６０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：四元数多様体及び四元数ケーラー多様体の複素部分多様体について、以下のような成果を得た。四元数射影空間の横断的複素部分多様体に関する基礎理論を構築した。四元数微分幾何学的不変量として、第2基本形式の (2,0)+(0,2)-part 及び ガウス写像と呼ばれる四元数ベクトル空間の複素構造テンソルに値をもつ関数Sを見出した。四元数ケーラー対称空間である複素グラスマン多様体に対し全複素部分多様体の構成、分類理論を発展させた。複素射影空間の射影余接束がツイスター空間であることを示し、この事実を応用し複素射影空間の複素部分多様体から、複素グラスマン多様体の全複素部分多様体を構成する方法を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：We studied complex submanifolds of quaternionic manifolds and quaternionic Kaehler manifolds. We developed the theory of transversally complex submanifolds in a quaternion projective space. We found the (2,0)+(0,2)-part of the second fundamental form and the function S whose values are complex structures of a quaternionic vector space as the invariants of the quaternionic differential geometry. We studied the theory of the construction and the classification of totally complex submanifolds in a complex Grassmann manifold of 2-planes. We showed that the projective cotangent bundle of a complex projective space is a twistor space of the complex Grassmann manifold. Applying this fact, we construct maximal totally complex submanifolds of the complex Grassmann manifold from complex submanifolds of a complex projective space.

研究分野：微分幾何学

キーワード：四元数多様体　全複素部分多様体　四元数射影空間　複素グラスマン多様体　横断的複素部分多様体　ツイスター空間

１．研究開始当初の背景

四元数多様体及び四元数（擬）ケーラー多様体は、それぞれ複素多様体、ケーラー多様体の四元数に対応するアナロジーとして考えられた対象である。これらを対象とする微分幾何学は、四元数微分幾何、四元数ケーラー幾何学と呼ばれ、豊かな内容をもつ研究成果がもたらされ、興味深い研究領域になってきている。特に、四元数ケーラー多様体の部分多様体論、調和写像論は大きく発展している。

本研究は四元数多様体及び四元数（擬）ケーラー多様体の複素部分多様体あるいは（擬）ケーラー部分多様体を対象とし、次のような課題を明らかにすることを目的とする。

課題１．4 次元球面 $\mathbf{S}^4$ 内の曲面に関する共形幾何学についての Burstall らの理論を高次元化し、四元数射影空間 $\mathbf{HP}^n$の半分次元“複素部分多様体”に関する四元数微分幾何学の理論を構築する。

課題 2. 等質四元数多様体あるいは等質四元数（擬）ケーラー多様体の構成理論に対応する形で、等質複素部分多様体の構成方法を見出す。

課題 1.について.F.E.Burstall, D.Ferus, K.Leschke, F.Pedit, and U.Pinkal ([2])は、4 次元球面 $\mathbf{S}^4$ の曲面に関する共形幾何学について、$\mathbf{S}^4$ を HP^1 と見ることにより、四元数幾何学の立場で定式化し、その研究に大きな進展をもたらした。彼らの理論の高次元化の試みを次のような図式で考えたい:

高次元化の試み

「$\mathbf{HP}^1$ の $\mathbf{GL(2,H)}$-幾何＝$\mathbf{S}^4$ の共形幾何」の高次元化として

「$\mathbf{HP}^n$ の $\mathbf{GL(n+1,H)}$-幾何＝$\mathbf{HP}^n$の四元数微分幾何」を設定し、

「$\mathbf{S}^4$ の曲面（リーマン面）」の高次元化として

「$\mathbf{HP}^n$ の半分次元“複素部分多様体”」を考える。

課題１については、この高次元化の試みとして、四元数射影空間 $\mathbf{HP}^n$の半分次元“複素部分多様体”に関する理論を構築することが目標となる。

課題 2 について

研究代表者は HP^n の第２基本形式が平行となる全複素部分多様体（対称部分多様体）を構成分類している([4])。ここで発見された部分多様体はいずれも等質複素部分多様体であり、様々な研究者に興味を持たれ、研究が進展した。他の四元数ケーラー対称空間や等質四元数多様体についても同様に等質複素部分多様体の構成方法を明らかにすることが目標となる。

２．研究の目的

上記第１項で述べた 2 つの課題について、その目的を具体的に述べる。最初に本研究の鍵となる概念である四元数多様体，横断的複素部分多様体、全複素部分多様体の定義を述べておく。N^{4n} を $4n$ $(n\geqq 2)$ 次元多様体とし、Q を End TN の 3 次元部分束で次の条件を満たすものとする:

(a) N の各点 の近傍で定義された Q の局所枠場 $\{ I,J,K \}$ が存在して、$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 =-id$, $IJ = -JI= K$, $JK= -KJ= I$, $KI = -IK= J$ を満たす。

(b) 捩率零のアファイン接続で, End TN の中で Q を平行にするものが存在する。

このとき、 Q を N 上の四元数構造といい、Q を備えた多様体 N を**四元数多様体**という。また条件 (b) をみたすアファイン接続を **Q -接続**という。条件 (a) をみたす局所枠場$\{ I,J,K \}$を**局所許容場**という。

四元数構造 Q に適合する（擬）リーマン計量 gをもちかつこのリーマン接続がEnd TN の中で Q を平行にするとき、(g,Q) を 四元数（擬）ケーラー構造といい，(g,Q) を備えた多様体 N を**四元数（擬）ケーラー多様体**という([1]) 。四元数射影空間 $\mathbf{HP}^n$は、四元数ケーラー多様体の典型例である。

四元数多様体 (N,Q) の部分多様体 M^{2m} が**横断的複素部分多様体** であるとは、$Q|_M$ の大域的な切断 I が存在して (1) $I^2 = -id$, (2) $I(TM)= TM$, (3) $\langle I,J\rangle = 0$ をみたす任意の $J\in Q|_M$ について $J(TM) \cap TM =\{0\}$ を満たすときをいう。$m\geqq 2$ のとき、I から誘導された M の概複素構造は積分可能となり、M は複素多様体になる。四元数（擬)ケーラー多様体 (N,Q,g) の横断的複素部分多様体 M^{2m} が、上記 (3) において $J(TM) \perp TM$ を満たすとき、特に**全複素部分多様体** という。

$Z= \{ J \in Q \mid J^2 = -id \}$ は N 上の $\mathbf{S}^2$ -束で、四元数多様体 (N,Q) の**ツイスター空間**と呼ばれている。Z は自然に複素多様体の構造をもつ。リッチ曲率が消えない四元数ケーラー多様体上の ツイスター空間は正則接触構造をもつ。$\mathbf{HP}^n$ のツイスター空間は複素射影空間 $\mathbf{CP}^{2n+1}$ となる。N の横断的複素部分多様体(resp.全複素部分多様体) M の自然なリフト $I(M) = L$ は、Z の複素部分多様体 (resp. 複素ルジャンドル部分多様体)となり、またその逆も成立するという興味深い関係がある。

上記第１項で述べた課題１に関しては、四元数射影空間 $\mathbb{HP}^n$ の半分次元横断的複素部分多様体に関する理論を構築することが目標となる。四元数構造のみに依存し、Ｑ -接続や四元数（擬）ケーラー計量などに依存しない四元数微分幾何学の立場からの理論構築を行う。具体的には次のような問題に取り組む：

1-(1) HP^n の横断的複素部分多様体について扱う準備として、一般の四元数多様体の横断的複素部分多様体に関する基礎理論を構築する。

1-(2) 四元数微分幾何学の立場から横断的複素部分多様体の良い不変量を見出し、特別なクラスの横断的複素部分多様体に対してその不変量を用いた特徴付けを行う。

1-(3) S^4 の曲面に対する Willmore 汎関数に相当する汎関数を導入し、その変分問題の解となる部分多様体を研究する。

1-(4) Bäcklund 変換に相当する変換の理論、変形の理論を構築する。

1-(5) 横断的複素部分多様体のツイスター空間へのリフトと横断的複素部分多様体の関係に注目する理論を構築し、上記のような問題に応用することを試みる。

課題 2 に関しては、 $\mathbf{HP}^n$ の類似として、四元数ケーラー対称空間であるグラスマン多様体 $G_2(\mathbf{C}^m)$, $G_4(\mathbf{R}^m)$ についてそのツイスター空間を利用して横断的複素部分多様体、全複素部分多様体、特に等質であるものを構成する方法を探る。Alekseevsky and Cortes は、Clifford 代数やスピン表現を用いて、等質四元数多様体及び等質四元数（擬）ケーラー多様体を組織的にかつ大量に構成する方法を示した（[3])。Joyce による方法も興味深い。彼らの構成理論 に対応する形で、等質全複素部分多様体の構成方法を見出す。

以上のように、本研究は複素微分幾何と四元数微分幾何が相互作用する四元数複素微分幾何学とでも呼ぶべき興味深い研究領域をなす。

３．研究の方法

鍵となる方法は、「四元数ベクトル束の議論」「ツイスター空間の理論」の２つである。多様体 M から四元数射影空間 $\mathbf{HP}^n$ への写像を扱うことと自明束 $M\times\mathbf{H}^{n+1}$ の H 直線束を考えることは同値である。Burstall らも四元数ベクトル束を用いた四元数複素微分幾何の理論を展開している。彼らの理論の高次元化を考えるという方針で、四元数ベクトル束に関する議論を発展させる。

研究目的の項に述べた横断的複素部分多様体や全複素部分多様体のツイスター空間へのリフトとこれらの複素部分多様体の関係は，横断的複素部分多様体や全複素部分多様体の構成・分類，モジュライ空間の構成などの問題に良い方法を与える。「ツイスター空間の理論」を発展させ、研究目的に述べた課題に挑む。

４．研究成果

課題１については、四元数射影空間の横断的複素部分多様体に関する基礎理論を構築した。その成果は論文①にまとめ発表した。課題２については、四元数ケーラー対称空間である複素グラスマン多様体に対し全複素部分多様体の構成、分類理論を発展させた。その成果は論文②にまとめ発表した。ここでは、論文①、②で示された成果の概要を述べる。

最初に、一般の四元数多様体の横断的複素部分多様体に関わる基本的な結果を述べる。$4n$ $(n\geqq 2)$次元四元数多様体(N^{4n},Q) の $2n$ 次元横断的複素部分多様体 M^{2n} を考える。M は、$Q|_M$ の切断 I に関して、概複素部分多様体になっているとする。I を M に制限して得られる M の概複素構造を同じ記号 I で表す。このとき、I は積分可能で、(M,I) は複素多様体になる。$Q|_M$ の局所切断 J,K を $\{I,J,K\}$ が局所許容場となるように選ぶ。$TM^\perp=JTM$ とおく。$TM^\perp$ は J の選び方によらず定まり、$TN|_M$ の I 不変部分束となる。このようにして次の分解が得られる：

(♣)　$TN|_M = TM + TM^\perp$

(N^{4n},Q) の Q 接続を１つ選ぶ。上の分解 (♣) によって、アファイン微分幾何学での部分多様体論が展開できる。特に第２基本形式 σ が定義される。M の複素構造 I によって σ を $(2,0)+(0,2)$ 成分 σ_+, $(1,1)$ 成分 σ_- に分解する。このとき次が成立する。

命題１．第２基本形式の $(2,0)+(0,2)$ 成分 σ_+ は Q 接続の選び方によらない。

この命題により、四元数構造のみによる横断的複素部分多様体の不変量が見出された。

次に、四元数射影空間 $\mathbf{HP}^n$ の半分次元横断的複素部分多様体 M に関し、得られた結果を述べる。鍵となる方法は、「四元数ベクトル束の議論」である。多様体 M から四元数射影空間 $\mathbf{HP}^n$ への写像 f 、及びその微分 df を四元数ベクトル束の言葉で捉える。写像 f に対して、自明束 $\mathcal{H}=M\times\mathbf{H}^{n+1}$ の H 直線束 L が定まる。また、写像 f の微分 df は、線形準同型 $df: TM \to \mathrm{Hom}(L, \mathcal{H}/L)$ とみることができる。ここで、$\mathcal{H}/L$ は商ベクトル束を表す。以降、M を四元数射影空間 $\mathbf{HP}^n$ の半分次元横断的複素部分多様体とし、$f: M \to \mathbf{HP}^n$ を対応するはめ込み写像とする。M 上の（ベクトル値）１次微分形式 ω に対し、$*\omega$ を $*\omega(X)=\omega(IX)$ で定める。ここで、I は M の複素構造である。写像 $S: M \to \mathrm{End}(\mathbf{H}^{n+1})$ を $\mathbf{H}^{n+1}$ の複素構造テンソルに値をもつ関数とする。このとき、

End ($\mathbf{H}^{n+1}$) に値を持つＭ上の１次微分形式 A^+, A^- を次のようにして定義する：

$$A^+ = \frac{1}{4}\{SdS + * dS\},$$
$$A^- = \frac{1}{4}\{SdS - * dS\}$$

以上のような準備のもと、次のような結果が成立することを示した。

定理２. Ｍを四元数射影空間 $\mathbf{HP}^n$ の半分次元横断的複素部分多様体とし、$f: M \to \mathbf{HP}^n$ を対応するはめ込み写像とする。L を f に対応する自明束 $\mathscr{H}=M\times\mathbf{H}^{n+1}$ の H 直線束とする。このとき、次の３条件を満たす複素構造テンソルに値をもつ関数
$S: M \to \mathrm{End}(\mathbf{H}^{n+1})$ がただ一つ存在する。
(1) $SL=L$, $dS(L) \subset L$
(2) $* df = df S|_L = \pi_L S df$
(3) $A^-|_L=0$
ここで、π_L は射影 $\pi_L: \mathscr{H} \to \mathscr{H}/L$ を表す。

上の結果は、Burstall らによる結果([2] 定理 2) の高次元版になっている。関数 S は四元数射影空間 $\mathbf{HP}^n$ の半分次元横断的複素部分多様体のガウス写像と呼ばれるべきものであり、横断的複素部分多様体を研究する際重要な役割を果たすものと期待される。

複素射影空間 $\mathbf{CP}^n$ は自然に $\mathbf{HP}^n$ の部分多様体となり、半分次元横断的複素部分多様体の典型例となる。この場合上記定理 2 から定まるガウス写像は定数値関数になる。逆に、$\mathbf{H}^{n+1}$ の複素構造 S に対して、
$S' = \{ \boldsymbol{l} \in \mathbf{HP}^n \mid S\boldsymbol{l}=l \}$ とおくと、S' は半分次元横断的複素部分多様体となり、複素射影空間 $\mathbf{CP}^n$ に正則微分同型になる。これらの事実に対応して複素射影空間の特徴付けに関する次のような興味深い結果を得た。

定理 3. M を $\mathbf{HP}^n$ に横断的複素部分多様体として埋め込まれた複素 n 次元複素多様体とする。 M 上 $\sigma_+=0$ ならば、$\mathbf{H}^{n+1}$ の複素構造 S が存在し、M はこの S から定まる $\mathbf{CP}^n$ の開部分多様体になる。

論文 ② にまとめられた複素グラスマン多様体 $G_2(\mathbf{C}^{m+2})$ の全複素部分多様体の構成、分類理論について述べる。$G_2(\mathbf{C}^{m+2}) = SU(m+2)/S(U(2)\times U(m))$ は $\mathbf{C}^{m+2}$ の複素 2 次元部分空間全体のなす複素グラスマン多様体を表す。$G_2(\mathbf{C}^{m+2})$ には、ケーラー構造と四元数ケーラー構造という２つの興味深い構造が入りその相互の関係も興味深い。
$G_2(\mathbf{C}^{m+2})$ の四元数ケーラー構造から定まるツイスター空間について述べるため、複素多様体の射影余接束について思い起こす。 N を複素多様体とし、$\mathbf{T^*N}$ をその余接束、$\mathbf{P(T^*N)}$ を射影余接束とする。$\mathbf{P(T^*N)}$ には、標準的に正則接触構造が定義されることが知られている。M を N の複素部分多様体とし、$\mathbf{P(N^*M)}$ をその射影法余接束とする。$\mathbf{P(N^*M)}$ は、自然に $\mathbf{P(T^*N)}$ の複素部分多様体になるが、特に $\mathbf{P(T^*N)}$の正則接触構造に関してルジャンドル部分多様体になることが知られている。論文 ② では次のことを明らかにした。

定理４. 複素射影空間 $\mathbf{CP}^{m+1}$ の射影余接束 $\mathbf{P(T^*CP}^{m+1})$ から複素グラスマン多様体 $G_2(\mathbf{C}^{m+2})$ 上の四元数ケーラー構造から定まるツイスター空間への自然な正則同型写像がある。さらに、この写像によって $\mathbf{P(T^*CP}^{m+1})$ の正則接触構造は、$G_2(\mathbf{C}^{m+2})$ のツイスター空間上の正則接触構造に移される。

この定理を応用することによって、$G_2(\mathbf{C}^{m+2})$ の全複素部分多様体の構成、分類に関する結果が得られる。

定理５. $\mathbf{CP}^{m+1}$ の複素部分多様体 M から $G_2(\mathbf{C}^{m+2})$ の全複素部分多様体 $\mathbf{P(N^*M)}$ が構成される。特に、$\mathbf{CP}^{m+1}$ の複素超曲面 M は $G_2(\mathbf{C}^{m+2})$ の全複素部分多様体としてはめ込まれる。

等質である全複素部分多様体の分類に関する次のような定理も成立する。

定理６. 等質である $G_2(\mathbf{C}^{m+2})$ の全複素部分多様体は、次の $\mathbf{CP}^{m+1}$ の等質複素部分多様体から定理 5 によって得られるものに限る：
(1) 線形部分空間 $\mathbf{CP}^k \to \mathbf{CP}^{m+1}$
(2) Segre 埋込 $\mathbf{CP}^1\times\mathbf{CP}^n \to \mathbf{CP}^{2n+1}$
(3) 2 次超曲面 $\mathbf{Q}^m \to \mathbf{CP}^{m+1}$
(4) Plücker 埋込 $G_2(\mathbf{C}^5) \to \mathbf{CP}^9$
(5) スピン表現による埋込 $SO(10)/U(5) \to \mathbf{CP}^{15}$

その他、ケーラー構造に関係する性質を利用した分類問題など興味深い結果も得られている。

引用文献

[1] A.L.Besse: *Einstein manifolds*, Chapter 14, 1986
[2] F.E.Burstall, D.Ferus, K.Leschke, F.Pedit, and U.Pinkall：*Conformal geometry of surfaces in S^4 and quaternions*, Springer Lecture Notes in Mathematics Vol.1772, Springer, Berlin,2002
[3] V.Cortes：*A new construction of homogeneous Quaternionic manifolds and related geometric structures* , Memoirs of A.M.S. 700(2000)
[4] K.Tsukada：*Parallel submanifolds in a quaternion projective space,* Osaka J. Math. 22(1985), 187-241

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３　件）

① K.Tsukada,Transversally complex submanifolds of a quaternion projective space, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 2017(印刷中)
② K.Tsukada,Totally complex submanifolds of a complex Grassmann manifold of 2-planes, Differential Geometry and its Applications, 44(2016),30-51
③ N. Ejiri: Ruled complex Lagrangian submanifolds of dimension two in C^4, Prospects of Differential Geometry and its Related Fields,T. Adachi, H. Hashimoto and M. Hristov editors,World Scientific (2013), 213-225.

〔学会発表〕（計　５　件）

① K.Tsukada, Transversally complex submanifolds of a quaternion projective space, International Workshop on “Quaternionic Differential Geometry and its Related Topics” 2016.9.9,お茶の水女子大学
② K.Tsukada, Transversally complex submanifolds of a quaternion projective space, The 20th International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds, 2016.7.29, Kyungpook National University, Daegu, Korea
③ K.Tsukada, Totally complex submanifolds of a complex Grassmann manifold of 2-planes, 第９回大阪市立大学数学研究所-慶北国立大学 HGRG 共催微分幾何学ワークショップ「部分多様体の幾何学とリー理論」,2015.2.13, 大阪市立大学
④ K.Tsukada, Totally complex submanifolds of a complex Grassmann manifold of 2-planes, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会　一般講演　, 2014.9.25 広島大学
⑤ N. Ejiri: Ruled complex Lagrangian submanifolds of dimension two in $\mathbf{C}^4$, International Workshop on Special Geometry and Minimal submanifold, 2013.8.8 東北大学,

〔図書〕（計　０　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等 該当なし

６．研究組織
(1)研究代表者
塚田　和美（TSUKADA Kazumi）
お茶の水女子大学・基幹研究院・教授
研究者番号：30163760

(2)研究分担者
江尻　典雄（EJIRI Norio）
名城大学・理工学部・教授
研究者番号： 80145656

(3)連携研究者 該当なし

(4)研究協力者　該当なし