1版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 １ 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４０００６７
研究課題名（和文）微分方程式論の基礎となる接触織物理論と関連する種々の幾何構造の研究

研究課題名（英文）Research on Contact Web Theory and Related Geometric Structures as Foundations of Theory of Differential Equations

研究代表者
佐藤　肇（SATO, Hajime）

名古屋大学・多元数理科学研究科・名誉教授

研究者番号：３００１１６１２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：　平面の3織物(３つの横断的一次元葉層)に対しての線形化写像の射影変換の下での一意性の問題が計算図表理論における基本問題で，グロンウォールの予想といわれ，100年以上経た今も未解決である．
　我々は，グロンウォール予想における３織物をルジャンドルｄ織物に替えた場合を考えて，ｄが4以上の場合に接触射影変換の下での線形化写像の一意性を示した．証明は，平面射影幾何学における命題に対応する接触射影幾何学の基礎定理を一つ一つ確定してゆくことにより得られた．

研究成果の概要（英文）：The uniqueness problem of linearizations of planar 3-webs under projective transformations is called Gronwall conjecture and still open for more than 100 years. Our research is concerned with Legendrian 3-webs on the 3-dimensional contact space. We proved the uniqueness of linearization map under contact projective transformations for Legendrian d-web when d is greater than 3. This solves the Gronwall conjecture in the (restricted) case above. The proof is given by showing the fundamental theorems, one by one, of contact projective geometry corresponding to those of planar projective geometry.

研究分野：数物系科学

キーワード：ルジャンドル織物　グロンウォール予想　3階常微分方程式　シュワルツ微分　接触射影幾何　線形化

1. 研究開始当初の背景

(1) 現代の数理物理の現象は，微分方程式系の解として記述することが基本的な方法であると認識されている．その微分方程式の解を，具体的な関数で表現することは一般には不可能であるから，定性的な性質を解析することが一番の課題となる．その解明のための有効な方法は，微分方程式を相空間上のベクトル場の集まりと考え，解の集合全体が，相空間の葉層の構造を与えているとみなすことである．更に重要で，今まで研究がされていなかったことは，異なった形の別の微分方程式系がいくつか同じ相空間に与えられていて，それらの間の良い均衡を与える解を見つける問題である．この状況を与える幾何学的枠組みが 織物理論 (web theory) である．Lie と Poincaré の２重移動曲面論を端となす織物理論は２０世紀のはじめに Blaschke などにより構築されたが，微分方程式論と深く関係していた．力学系の相空間には（高次) の接触構造が入っていて，微分方程式の解の接束は接触形式を消しているから，織物を与える各葉は接触形式の等方的部分多様体となり，織物は接触織物となる．このような構造は，歴史的にも研究が深い射影構造や道の幾何のはるかな一般化であり，関連する幾何構造も多く，構造自体の集まりが，さらに抽象的な織物をなしているとも考えられる．系統的にはなにもできていないこの理論を最初からはじめて，すべて構築，完成するのが目的である．

(2) 研究代表者は、吉川敦子との共同研究で３階の常微分方程式の接触同相による分類問題を，E.Cartan による動標構の方法で田中昇の理論を用いて完全に解決した。その結果によると

$y''' = f(x, y, y', y'')$ が $y''' = 0$ に接触空間 (x, y, y') の接触同相で移るのは、

$$y''' = P(x,y,y') + Q(x,y,y')y'' + R(x,y,y')(y'')^2 + S(x,y,y')(y'')^3$$

という形の時に限り、さらに４つの関数 P, Q, R, S は、平坦条件と呼ばれる４つの偏微分方程式系を満たしているときであることがわかる。

この結果は，幾何的には，次のことを示唆する結果である．３次元の接触多様体からラグランジュ部分空間全体のなす４次元エンゲル空間を作る．これは２階のジェットのなす空間とも考えられ，接触多様体への射影の逆像の集まりが１次元葉層構造を与えている．一方，３階の常微分方程式の解全体も横断的な１次元葉層構造を与えており，この２つの組が織物を定める．微分方程式の接触同相による分類問題は，この織物の分類問題として把握出来，明確な幾何学的対象となる．

その後，研究代表者は連携研究者の小沢哲也，鈴木浩志などとの共同研究で，微分同相のシュワルツ微分が係数となる線形偏微分方程式系を，非可換な二つのベクトル場（ハイゼンベルグ群不変性をもつ）による偏微分方程式系として定め，その微分方程式系の積分可能条件が，まさしく微分同相で引き戻した射影構造の平坦条件と一致することを示した．線形偏微分方程式系の解全体の空間には，シンプレクティック構造が入り，その包合的元から，元の接触写像が再現されることもわかった．このように，解から接触変換を作り出すような方程式系は，いままでの可換な偏微分方程式論では不可能なことなので，新しい非可換偏微分方程式論のはじまりとなると考えられた．

2. 研究の目的

(1) このような微分方程式論の基礎である接触織物には織物階数という不変量があり，微分形式の基礎理論より，いくつかの場合には，これが常に有限の数となり，その中での最大の値の決定と，その織物階数の最大値を与える織物の形状の決定が重要な問題となる．研究代表者は連携研究者との共同研究で，d 個の葉層からなる d-接触葉層の織物階数の最大値を，接触多様体が３次

元の場合に決定した．この結果はほぼ同時に J.S.Wang によっても得られた．

さらに織物理論には，線形化される織物の線形化は射影変換を除いて単一であろうという **Gronwall 予想**がある．この予想は葉層の数が多い場合には，接触織物の場合に，上で得られた定理の応用として証明することが出来た．しかし，すべての場合を完全に網羅する定理はまだ出来ておらず，これからの課題である．

(2) まだ重要ながらほとんど基礎理論も完成していない接触織物理論では，一般次元の場合の最大階数が有限か，またその最大階数の値を決定したい．次に最大階数を与える接触織物の射影幾何的双対が代数的な多項式として特徴づけられるかが問題である．接触構造を与えないある種の織物については，代数幾何的方法で，Chern-Griffith の問題が解決されたが，接触織物では，まだ定式化の予想すらされてないので，その手段を提出することから始める必要がある．さらにこの研究は，接触変換の Schwarz 微分の定義とその性質の研究とも関連している．３次元接触空間の接触同相 f は４つの関数 P,Q,R,S を定義するが，それらは，f の２階までの偏導関数達の有理関数で表される．これは，平面の正則変換から定められる高次のシュワルツ微分と（可換なベクトル場による２次の微分を非可換なベクトル場によるものとするという対応で）形が同じであり，接触同相のシュワルツ微分と呼ぶことができる．シュワルツ微分が全て消えていれば，その接触同相は線形射影接触同相であるということが従う．高次のシュワルツ微分は，それを係数とする線形偏微分方程式系を与えることができて，シュワルツ微分の偏微分方程式による平坦条件がその線形偏微分方程式系の可積分条件となり，解達の射影化により，シュワルツ微分を与えた正則変換が再生される．さらに係数に特異点を考えることにより，有用な超幾何微分方程式系を構成するというのが，シュワルツ・プログラムと呼ばれているものである．この流れで，高次元に対しての決定的結果を得たい．

(3) 異なった型の微分方程式系を接触織物理論として考える発想は，本質的であろうという考え方はあったが，解析，幾何の両方の一般的には知られていない専門的知識の交差の必要性より，ほとんど進歩していなかった．Cartan の微分形式の包合系の理論と，最近発達して来ている接触およびシンプレクティック幾何の有機的結合は，新しい結果を生み出す可能性は非常に大きいと考えられる．方程式の解を幾何学的に捕らえる方法を与えるのが計算図表理論である．その基礎となる線形化の一意性を保証する Gronwall 予想も一般的な設定で解決したい．経済学での需要と供給の一般均衡を求める効用理論も，接触織物理論の言葉で表現できることがわかってきた．接触織物理論の確立は，このような社会科学への応用も大きいと思われる．

3．研究の方法

微分方程式の解の研究は，解を具体的な関数で表現することは一般には不可能であるから，定量的な性質から解の大域的，漸近的な様子を調べる方法と，微分方程式を幾何学的に考え，幾何それぞれの特質に沿った特別な性質をもつ微分方程式を見つけだして，その幾何学を適用して方程式を解析する方法が考えられ，いずれも重要である．微分方程式の幾何学の解明のための有効な方法は，微分方程式を相空間上のベクトル場の集まりと考え，解の集合全体が，相空間の葉層の構造を与えているとみなすことである．その構造の研究には，異なる点に対して共通の座標を与えることが必須となり，接続の導入が必要となる．さらには，高次の微分の様子を調べるためには，高次の微分を規定する高次枠が必要となり，この微分枠の延長操作が有限回で決定可能となる有限型と，そうでない無限型の幾何構造の場合に分かれるが，それぞれの場合に対応する解法理論が必要となる．これらの方程式の無限型，有限型への分類のさら

なる分岐の様子を調べるためには，Lie 代数の表現論に対応する環論の手法と，それとは全く異なる，解の確率論的様子と関係する位相幾何学の手法が有効となる．また，異なった形の別の微分方程式系がいくつか同じ相空間に与えられている場合に，それらの間の同等性を見い出す新たな方程式系を得ることが必要となる．

4．研究成果

(1)　多様体が d 個の互いに横断的な葉層を持つとき，d-織物という．平面の 3 織物に対しての線形化写像の射影変換の下での一意性の問題が，計算図表理論の基本問題で，グロンウォール予想といわれ，100 年以上経た今もいまだに解決されてはいない．接触多様体の d-織物のすべての葉が，接触構造のルジャンドル部分多様体になっているとき，ルジャンドル d-織物という．我々の研究は，接触多様体の次元が 3 の場合で３織物をルジャンドル d 織物に変えた場合を考えて，d が 4 以上の場合に，線形化写像の接触射影変換の下での一意性を示し，その場合のグロンウォール予想を肯定的を解決した．３階常微分方程式の線形化と接触同値問題を完全に解決した，研究代表者たちの結果を用いて，接触射影幾何学に対して，平面射影幾何学に対応する基礎定理を，ひとつひとつ確定することによりその応用として証明を与えることが出来た．

　この結果は，シンプレクティック幾何学と関連する射影接触幾何学の基本定理，及び図表幾何学を用いての物理現象の幾何学的解明として，国内外においていろいろな応用，発展が可能となるものであると思われる．

(2)　シンプレクティック多様体上の互いに横断的な 2 つのラグランジュ葉層の組で定義されるビラグランジュ構造について考察した．この構造はパラケーラー構造とも一致する．平面上では，その平坦条件が，経済学者のサミュエルソンの考えた 2 組の無差別曲線（効用曲線）の均衡を与えるものとして与えた幾何学的条件と一致していることが知られていた．我々はこの結果を次元の高い場合に拡張することが出来て，平坦性を与える高次元サミュエルソン条件を確定した．

　この結果は

　Tetsuya OZAWA, Hajime SATO and Hiroshi SUZUKI, Samuelson Condition for Lagrangian 2-webs

　として preprint にまとめた．多変数に由来する経済要因を統御する最適基本系として，制御理論への応用が期待できる．

5．主な発表論文等

【雑誌論文】(計 2 件)

[1] T. Ozawa and H. Sato: Linearization and Gronwall conjecture of Legendrian webs, International Journal of Mathematics, 査読有, **26**:1(2015), 1541003, 8 pp.

[2] S. Ohno, T. Ozawa and M. Umehara: Closed planar curves without inflections., Proc. Amer. Math. Soc., 査読有, **141**:1(2013), 651–665.

【学会発表】(計 9 件)

[1] 佐藤 肇: Special Contact Structures, 第 39 回トポロジーセミナー, 2016 年 03 月 20 日, ホテル伊東ガーデン (静岡県伊東市).

[2] 佐藤 肇: Bochoner 平坦な Lie 型シンプレクティック構造について, 名城幾何学研究集会「幾何構造の深化」, 2016 年 03 月 02 日, 名城大学 (名古屋市).

[3] H. Sato: Sanuelson condition for bi-Lagrangian structure, Workshop on Poisson geometryand mathematical physics 2016, 2016 年 01 月 07 日, Tianjin(China).

[4] 佐藤 肇: Grassmann 構造の基本微分方程式, 尾鷲微分トポロジー 2015 研究会, 2015 年 08 月 12 日, 尾鷲市立中央公民館 (三重県).

[5] 佐藤 肇: 等質接触多様体の定める幾何構造, 第 38 回トポロジーセミナー, 2015 年 03 月 19 日, 山喜旅館 (静岡県伊東市).

[6] 佐藤 肇: 放物型部分群の定める幾何構造, 名城幾何学研究集会「幾何構造の融合と発展」, 2015 年 03 月 11 日, 名城大学 (名古屋市).

[7] 佐藤 肇: 高次元倍納屋織物構造のサミュエルソン平坦条件, 尾鷲微分トポロジー 2013 研究会, 2013 年 08 月 20 日, 尾鷲市立中央公民館 (三重県).

6. 研究組織

(1) 研究代表者
佐藤 肇 (SATO Hajime)
名古屋大学・多元数理科学研究科・名誉教授
研究者番号：30011612
(2) 研究分担者　なし
(3) 連携研究者
小沢　哲也 (OZAWA Tetsuya)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号：20169288

鈴木　浩志 (SUZUKI Hiroshi)
名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：70235993