

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 4 月 20 日現在

機関番号：14401  
 研究種目：基盤研究(C) (一般)  
 研究期間：2013～2015  
 課題番号：25400071  
 研究課題名(和文)コンパクト等質空間上のアインシュタイン計量の研究  
  
 研究課題名(英文)Einstein metrics on compact homogeneous spaces  
  
 研究代表者  
 坂根 由昌 (SAKANE, Yusuke)  
  
 大阪大学・その他部局等・名誉教授  
  
 研究者番号：00089872  
  
 交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：コンパクトな等質空間上の不変なアインシュタイン計量の研究を行った。特に、一般化された旗多様体、Stiefel多様体および単純リー群上のアインシュタイン計量を見つけた。一般化された旗多様体に関しては、等方部分群により5つの既約成分に分解できるものをすべて決定し、これらの空間上の不変なアインシュタイン計量をすべて見いだした。また、Stiefel多様体上の不変なアインシュタイン計量、および、特殊直群  $SO(n)$  ( $n > 6$ ) およびシンプレクティック群  $Sp(n)$  ( $n > 2$ ) に対して、naturally reductiveでない不変なアインシュタイン計量を構成した。

研究成果の概要(英文)：We studied invariant Einstein metrics on compact homogeneous spaces. In particular, we found new Einstein metrics on generalized flag manifolds, Stiefel manifolds and compact simple Lie groups. We determined all generalized flag manifolds with 5 isotropy summands and found all invariant Einstein metrics on these manifolds. Moreover, we constructed new Einstein metrics on Stiefel manifolds and non naturally reductive Einstein metrics on special orthogonal groups  $SO(n)$  ( $n > 6$ ) and symplectic groups  $Sp(n)$  ( $n > 2$ ).

研究分野：幾何学

キーワード：等質アインシュタイン計量 一般化された旗多様体 Stiefel多様体 コンパクト単純リー群 一般化されたWallach空間 リッチテンソル グレブナー基底

## 1. 研究開始当初の背景

(1) アインシュタイン計量をもつ等質空間は大きく3つの場合に分かれる。すなわち、リッチテンソルが正、ゼロ、負の場合である。リッチテンソルが正のとき、等質空間はコンパクトで基本群は有限となり、標準的な計量を持つ球面、複素射影空間などのコンパクト型の既約対称空間は、この場合の典型的な例である。リッチテンソルが0のときは、等質空間上の不変なアインシュタイン計量は平坦となる。リッチテンソルが負のときは、作用するリー群は非コンパクトとなる。今までに知られている非コンパクト等質空間上の左不変なアインシュタイン計量はすべて可解リー群上の左不変計量としてあらわされる。したがって、コンパクト等質空間上のアインシュタイン計量については、リッチテンソルが正の場合を考察することになる。

(2) 等質空間上にいつ不変なアインシュタイン計量が存在するかは未解決の問題である。コンパクト等質空間上に不変なアインシュタイン計量が存在しない最初の例は、Wang と Ziller により 1986 年に見いだされた。彼らが構成した例の中で次元が一番小さいものは 12 次元である。2006 年に Bohm と Kerr により、11 次元以下のコンパクト単連結等質空間に対しては、不変なアインシュタイン計量の存在が示された。

(3) 2004 年に Bohm, Wang と Ziller により、等質空間上の不変なアインシュタイン計量のモデュライ空間の連結成分は有限で、各連結成分はコンパクトであることが示された。さらに、Bohm, Wang と Ziller は  $\text{rank } G = \text{rank } K$  のとき、等質空間  $G/K$  上の不変なアインシュタイン計量は有限個であるという予想をたてている。このような空間の例としては一般化された旗多様体がある。

(4) 1979 年に、D'Atri と Ziller は、コンパクトリー群上の左不変なリーマン計量がいつ naturally reductive となるかを調べ、コンパクト単純リー群の場合には、このような計量を完全に分類をし、コンパクト型の既約対称空間を利用して、コンパクト単純リー群上の多くの naturally reductive な左不変アインシュタイン計量を構成した。さらに、コンパクト半単純リー群上には、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量があるのかという問題を提出した。

## 2. 研究の目的

(1) 一般化された旗多様体の場合に不変なアインシュタイン計量がどのくらいあるかを研究する。これにより Bohm, Wang と Ziller による予想を裏付けられる。

(2) コンパクト単純リー群上に、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計

量を構成する。D'Atri と Ziller は、主に既約対称空間や既約等方部分群をもつ等質空間を利用して、naturally reductive な左不変アインシュタイン計量を構成した。そこで、等方部分群による既約成分の個数が2個以上あるものを利用して、新しい左不変アインシュタイン計量を構成することを研究する。

(3) Stiefel 多様体上には、Jensen により2つの不変なアインシュタイン計量が構成されているが、これと異なるアインシュタイン計量を構成することを研究する。この空間は、一般化された旗多様体などとは異なり、一般の不変計量に関しては、等方部分群による既約成分が重複度をもつため、リッチテンソルの振る舞いが複雑になる。

## 3. 研究の方法

(1) 一般化された旗多様体上の不変なリーマン計量は、等方部分群による既約分解の既約成分の個数でパラメータ化することが出来る。このパラメータを用いて、リッチテンソルの成分を具体的に書き表す。このために両側不変なリーマン計量により定まる Wang と Ziller によるシンボルを用いる。また、一般化された旗多様体は、複素構造を固定するとケーラーアインシュタイン計量を持つため、これが利用でき、リッチテンソルの成分が決定できる。不変なアインシュタイン計量を持つ条件は、多変数の代数方程式が正の解を持つことと同値である。方程式を解くために、グレブナー基底を計算する。このためには、コンピュータによる計算が必要である。解の個数が有限個の場合には、グレブナー基底の中に一変数の多項式が存在するので、これを利用する。変数が増加するとコンピュータによる計算に多くの時間が必要となるので、5、6変数に対して適用してみる。

(2) 一般化された旗多様体で等方部分群による既約成分が2個のものを利用して、コンパクト単純リー群上に、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量を構成することを以前に研究したが、等方部分群による既約成分が3個のものを用いて、例外リー群上に、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量を構成することを研究する。また、別の等質空間、例えば、一般化された Wallach 空間を利用して、新しい naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量を構成する。

(3) Stiefel 多様体上を基底が一般化された Wallach 空間とするファイバーバンドルの全空間と考え、これを利用して、等方部分群による既約分解を行い、既約成分の個数で不変なリーマン計量をパラメータ化する。Arvanitoyeorgos, Dzhepko と Nikonorov は、この方法により、Stiefel 多様体上のいくつかの新しい不変アインシュタイン計量を構成

することに成功した。この方法をさらに押し進める。

#### 4. 研究成果

(1) 一般化された旗多様体上の不変なアインシュタイン計量は、等方部分群による既約分解の既約成分の個数が4以下のものに対しては、2012年頃にほぼ完成していたが、 $Sp(n)/(U(p) \times U(n-p))$ に対して、得られたケーラーでない2つのアインシュタイン計量が等長であるか判らなかつた。これを完全に解決した。

(2) 一般化された旗多様体で等方部分群による既約分解の既約成分の個数が5個のものに対しては、一般化された旗多様体をすべて分類し、この上の不変なアインシュタイン計量を等長変換とスカラー倍を除いて、すべて決定した。

(3) 一般化された旗多様体の等方部分群による既約分解の様子は、t-ルートで表すことが出来るが、t-ルートが  $G_2$  型となる一般化された旗多様体をすべて決定した。これは、既約成分の個数が6個のものとなるが、このような一般化された旗多様体上の不変なアインシュタイン計量をすべて決定した。

(4) Stiefel 多様体  $SO(n)/SO(n-4)$  ( $n > 5$ ) 上に、Jensen による不変なアインシュタイン計量と異なるアインシュタイン計量を構成した。Stiefel 多様体上の不変なアインシュタイン計量を一般化された Wallach 空間を利用して構成した。

(5) 一般化された Wallach 空間を利用することにより、 $SO(n)$  ( $n > 6$ ) および  $Sp(n)$  ( $n > 2$ ) 上に新しい naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量を構成した一般化された Wallach 空間を利用した計量を考察する利点は、このような計量のリッチテンソルは、対角成分以外の成分がゼロになることである。

(6) 一般化された旗多様体で等方部分群による既約分解の既約成分の個数が3個のものを利用することにより、コンパクト単純例外リー群上に新しい naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量を構成した。特に、例外リー群  $G_2$  に関しては、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量の存在が初めて示された。

(7) 例外リー群  $E_8$  の一般化された旗多様体で、第2ベッチ数が1で、等方部分群による既約分解の既約成分の個数が5および6個のものに対して、新しい不変アインシュタイン計量を構成した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

1 A. Arvanitoyeorgos, Y. Sakane and M. Statha, New Einstein metrics on the Lie group  $SO(n)$  which are not naturally reductive, *Geometry, Imaging and Computing* 2 (2015), 77 - 108

DOI: dx.doi.org/10.4310/GIC.2015.v2.n2.a1

2 A. Arvanitoyeorgos, Y. Sakane and M. Statha, New homogeneous Einstein metrics on Stiefel manifolds, *Differential Geom. Appl.* 35, Supplement, (2014), 2 - 18

DOI: dx.doi.org/10.1016/j.difgeo.2014.01.007

3 I. Chrysikos and Y. Sakane, The classification of homogeneous Einstein metrics on flag manifolds with  $b_2(M)=1$ , *Bull. Sci. math.* 138, (2014), 665 - 692

DOI: dx.doi.org/10.1016/j.bulsci.2013.11.002

4 A. Arvanitoyeorgos, I. Chrysikos and Y. Sakane, Homogeneous Einstein Metrics on Generalized Flag Manifolds with five isotropy summands, *Int. J. Math.* 24 (2013), 1 - 52

DOI: dx.doi.org/10.1142/S0129167X13500778

5 A. Arvanitoyeorgos, I. Chrysikos and Y. Sakane, Proving isometry for homogeneous Einstein metrics on flag manifolds by symbolic computation, *J. Symbolic Comput.* 55 (2013), 59 - 71

DOI: dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2013.03.005

[学会発表](計8件)

1 坂根由昌, Einstein metrics on compact homogeneous spaces, The 4<sup>th</sup> Workshop "Complex Geometry and Lie Groups", 奈良女子大学, 2016年3月25日

2 坂根由昌, Einstein metrics on compact simple Lie groups, *Lie Theory and Geometry*, Schloss Rauischholzhausen, ドイツ, 2016年3月10日

3 坂根由昌, Einstein metrics on compact simple Lie groups, 2015年度松江セミナー, 島根大学, 2015年12月1日

4 坂根由昌, コンパクト単純リー群上の左不変なアインシュタイン計量について, 第22回沼津研究会 - 幾何、数理物理そして量子論 -, 沼津工業専門高等学校, 沼津, 2015年3月9日

5 坂根由昌, Some open problems on compact homogeneous Einstein manifolds, Mini-Workshop: Einstein Metrics, Ricci Solitons and Ricci Flow under Symmetry Assumptions, Mathematische, Forschungsinstitut Oberwolfach, ドイツ, 2014年9月29日

6 坂根由昌, New homogeneous Einstein metrics on compact simple Lie groups, ICDG2014, Veliko Tarnovo, ブルガリア, 2014年9月8日

7 坂根由昌, New homogeneous Einstein metrics on Stiefel manifolds and compact Lie groups  $SO(n)$ , 広島幾何学研究集会 2013, 広島大学, 東広島市, 2013年10月11日

8 坂根由昌, New homogeneous Einstein metrics on Stiefel manifolds and compact Lie groups  $SO(n)$ , The 12<sup>th</sup> conference on Differential Geometry and its Applications, Masaryk University, チェコ共和国, 2013年8月18日

〔図書〕(計2件)

1 A. Arvanitoyeorgos, Y. Sakane and M. Statha, Einstein metrics on the symplectic group which are not naturally reductive, Current Developments in Differential Geometry and its Related Fields, Proceedings of the 4th International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, World Sci. Publ., 2015, 256pp ( p.1 - p.22 )

2 A. Arvanitoyeorgos, I. Chrysikos and Y. Sakane, Homogeneous Einstein Metrics on Generalized Flag Manifolds with  $G_2$ -type  $t$ -Roots, Prospects of Differential Geometry and its Related Fields, Proceedings of the 3rd International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, World Sci. Publ., 2013, 244pp ( p.15 - p.38 )

〔その他〕

ホームページ: <http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sakane/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

坂根由昌 (SAKANE, Yusuke)

大阪大学・名誉教授

研究者番号: 00089872

### (4) 研究協力者:

Andreas Arvanitoyeorgos

Ioannis Chrysikos

Marina Statha