

平成 30 年 5 月 18 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400074

研究課題名(和文) リッチフローの一般化の研究

研究課題名(英文) Generalization of the Ricci flow

研究代表者

石田 政司 (Ishida, Masashi)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：50349023

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：リッチフローに付随する共役熱方程式の解に対する微分ハルナック不等式を、リッチフローを特殊な場合として含む一般化された幾何学的流の設定へ一般化した。また、底空間の次元が2次元の場合に、リッチヤングミルズフローに付随する共役熱方程式の解に対する微分ハルナック不等式を証明した。さらに、リッチフローの場合に重要な役割を担った簡約体積に当たる量を曲面上のリッチヤングミルズフローの場合に定式化し、その単調性を証明した。一方、底空間の次元が2次元とは限らない一般次元のリッチヤングミルズフローに対する非局所崩壊定理を曲率に関する条件の下、証明した。

研究成果の概要(英文)：We proved the differential Harnack inequality for the geometric flow in abstract setting. As a corollary, we obtained a new differential Harnack inequality for positive solutions to the conjugate heat equations associated with the Ricci flow coupled with harmonic map heat flow. We also proved a new differential Harnack inequality for the Ricci Yang-Mills flow on surface. Moreover, we introduced a reduced volume type quantity for the Ricci Yang-Mills flow on surface and proved its monotonicity under the flow. Under a mild condition on the curvature, we also proved a Perelman type no local collapsing theorem for the Ricci Yang-Mills flow in general dimension.

研究分野：幾何学

キーワード：リッチフロー 熱方程式

1. 研究開始当初の背景

ペレルマンによる3次元ポアンカレ予想の解決を1つの契機として、リッチフロー及びそれを特殊な場合として含む、より一般的な幾何学的流が様々な視点から研究されている。本研究課題では、リッチフローに対してペレルマンにより展開された理論(以下、ペレルマン理論)の深化を目指す。特に、一般化された幾何学的流に対してペレルマン型理論の構築を目指し、それを基にして、様々な幾何学的流の幾何解析的性質の理解を進めたい。

2. 研究の目的

本研究課題の主目的は、リッチフローを特別な場合として含む、より一般化された幾何学的流の性質をペレルマン理論的視点から研究することにある。特に、一般化された幾何学的流の非自明な例として、リッチフローに調和写像流をカップリングした幾何学的流である Lis フローおよび Muller フロー、さらには、リッチフローにヤングミルズフローをカップリングした幾何学的流であるリッチ-ヤングミルズフローなどの興味深い幾何学的流の幾何解析的研究をペレルマン理論的視点から推し進めたい。

3. 研究の方法

リッチフローの場合にペレルマンによって導入された W-汎関数や L-測地線などの基本的かつ重要な概念をリッチフローの一般化の場合に然るべく定式化し、単調性などの基本的な性質を証明する。それを基に、リッチフローの一般化の幾何解析的研究をペレルマン理論的視点から推し進める。

4. 研究成果

1) リッチフローに付随する共役熱方程式の解に対する微分ハルナック不等式を、リッチフローを特殊な場合として含む一般化された幾何学的流の設定で考察し、成果を得た。具体的には、一般の対称テンソルに関する幾何学的フローに対する非線形共役熱方程式を導入し、その解に対する微分ハルナック不等式を証明した。特に、考えている対称テンソルがリッチテンソルの場合はリッチフローであり、この場合は、我々の研究成果からハミルトンらによって証明されていた微分ハルナック不等式が自動的に導かれる。さらに、リッチフローの一般化である、Lis フローおよび Muller フローに対しても、我々の研究成果から、これらの一般化された幾何学的流に付随する共役熱方程式の解に対する微分ハルナック不等式を新たに導くことができた。

2) リッチフローにヤングミルズフローをカップリングした幾何学的流として、リッチ-ヤングミルズフローと呼ばれるものがある。上で登場したリッチフロー、Lis フロー、Muller フローと比較して、その性質は複雑で不明な点が多く、解明すべき点が多く残されている。この意味でも、リッチフローの一般化として、非自明かつ興味深い幾何学的流の具体例であると考えられる。底空間の次元が2次元の場合に、リッチ-ヤングミルズフローの低エネルギー解に付随する共役熱方程式の解に対する微分ハルナック不等式を証明した。これは(1)の成果と似ているが、その証明方法はより複雑で、完全に独立した成果と言える。この問題の困難さの1つは、考察するべき微分ハルナック不等式の形自体が、全く明らかでないことにある。また、3次元以上の高次元への拡張は今後の課題であり、研究を続行する。

3) ペレルマンはリッチフローに沿って単調性を持つ汎関数(W-汎関数)を導入し、その応用として非局所崩壊定理と呼ばれるリッチフローの特異性を調べる上で基本的な結果を証明している。この非局所崩壊定理をリッチ-ヤングミルズフローに対して拡張する問題に取り組み、曲率に関するある条件の下、ペレルマン型の非局所崩壊定理を証明した。この問題の困難さは、リッチ-ヤングミルズフローに対する W-汎関数の類似物が単調性などの自然な性質を持たないことにある。しかし、曲率に関するある条件の下、準単調性ともいふべき性質を持っていることを証明し非局所崩壊定理を確立した。曲率に関する条件を外せるかどうかは、今後の大きな課題として残されており、研究を続行する。

4) ペレルマンは測地線のリッチフロー版として L-測地線と呼ばれる対象を導入し、それを有効に使うことで、それまで困難だったリッチフローのある側面の性質を明らかにしている。これらの幾何は総称して L-幾何と呼ばれている。L-幾何の主要な登場人物として簡約体積と呼ばれる、リッチフローに沿って単調性を持つ性質の良い幾何学的量がある。リッチ-ヤングミルズフローに対する L-幾何、特に簡約体積にあたるものを定義することができるかどうかは、リッチヤングミルズフローが導入された2007年以来の懸案の問題の1つである。底空間の次元が2次元の場合にリッチ-ヤングミルズフローに対する簡約体積を導入し、その単調性を証明した。この問題の困難さは、L-幾何における長さの概念にあたる L-弧長の概念の類似物を、単調性などの良い性質を保つ形でリッチ-ヤングミルズフローの文脈で定義するのが全く容易でない

ことにある。この成果は、確率測度空間の最適輸送理論とも関連が深く、興味深い結果を今後もたらずと期待される。また、3次元以上の高次元の場合への拡張は最重要課題の1つであり今後も研究を続行する。

- 5) リッチフローと山辺フローをある意味で補完する幾何学的流として、リッチ-ブルギニオンフローと呼ばれる幾何学的流が存在する。リッチ-ブルギニオンフローに現れるパラメータをゼロにするとリッチフローが表れ、 ∞ に飛ばすと山辺フローが表れる。この意味で、パラメータが非正の場合のリッチ-ブルギニオンフローはリッチフローと山辺フローを補完していると考えられる。さて、ペレルマンによってリッチフローに対する非局所崩壊定理が知られているわけであるが、山辺フローおよびリッチ-ブルギニオンフローに対する非局所崩壊定理はいずれも知られていない。しかしながら、リッチ-ブルギニオンフローに現れるパラメータが非正の場合に、ペレルマン型の非局所崩壊定理の類似物を証明することができた。パラメータが正の場合の考察など、この結果は改良の余地が残されていると考えられるが、未開拓であるリッチ-ブルギニオンフローの特異点解析に大きく寄与するものと期待され、今後も研究を続行する。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計17件)

- (1) Ishida, Masashi, Sasahira, Hirofumi, Stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants of connected sums of four-manifolds with positive first Betti number II: Applications. *Communications in Analysis and Geometry* 25 (2017), 373–393. (査読有)
- (2) Ishida, Masashi, The normalized Ricci flow on four-manifolds and exotic smooth structures. *Asian Journal of Mathematics* 20 (2016), 903–917. (査読有)
- (3) Ishida Masashi, Matsuo, Shinichiroh, Nakamura Nobuhiro, Yamabe invariants and the PIN-(2)-monopole equations. *Mathematical Research Letter* 23 (2016), 1049–1069. (査読有)
- (4) Guo, Hongxin, Ishida Masashi, Harnack estimates for nonlinear heat equations with potentials in geometric flows. *Manuscripta Mathematica* 148 (2015), 471–484. (査読有)
- (5) Ishida Masashi, Sasahira Hirofumi, Stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants of connected sums of four-manifolds with positive first Betti number, I: non-vanishing theorem. *International Journal of Mathematics* 26 (2015) 23 pp. (査読有)
- (6) Akhmedov Anar Ishida Masashi, Park, B. Doug, Dissolving 4-manifolds, covering spaces and Yamabe invariant. *Annals of Global Analysis and Geometry* 47 (2015) 271–283. (査読有)
- (7) Ishida, Masashi, Small four-manifolds without non-singular solutions of normalized Ricci flows. *Asian Journal of Mathematics* 18 (2014), 609–622. (査読有)
- (8) Baykur, R. İnanç, Ishida, Masashi, Families of 4-manifolds with nontrivial stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants, and normalized Ricci flow. *Journal of Geometric Analysis* 24 (2014) , 1716–1736. (査読有)
- (9) Guo, Hongxin, Ishida Masashi, Harnack estimates for nonlinear backward heat equations in geometric flows. *Journal of Functional Analysis* 267 (2014) 2638–2662. (査読有)
- (10) Akhmedov, Anar, Ishida, Masashi, Park, B. Doug, Reducible smooth structures on 4-manifolds with zero signature. *Journal of Topology* 7 (2014), 607–616. (査読有)
- (11) Ishida, Masashi, Normalized Ricci flow, surgery, and Seiberg-Witten invariants. *International Journal of Mathematics* 25 (2014) 17 pp. (査読有)
- (12) Ishida, Masashi, Geometric flows and differential Harnack estimates for heat equations with potentials. *Annals of Global Analysis and Geometry* 45 (2014), 287–302. (査読有)
- (13) Tsuzuki, Masao, Spectral means of central values of automorphic L -functions for $GL(2)$. *Memoirs of the American Mathematical Society*. 235 (2015),

vii+129 pp. (査読有)

- (14) Sugiyama, Shingo, Tsuzuki, Masao, Existence of Hilbert cusp forms with non-vanishing L -values. Canadian Journal of Mathematics. 68 (2016), 908–960. (査読有)
- (15) Sugiyama, Shingo, Tsuzuki, Masao, Relative trace formulas and subconvexity estimates for L -functions of Hilbert modular forms. Acta Arithmetica. 176 (2016) 1-63. (査読有)
- (16) Tsuzuki, Masao, Orbital integrals on unitary hyperbolic spaces over p -adic fields. Tokyo Journal of Mathematics. 39 (2017) 923–975. (査読有)
- (17) Tsuzuki, Masao, Relative trace formulas for unitary hyperbolic spaces. Kyoto Journal of Mathematics 58 (2018) , 427–491. (査読有)

[学会発表](計 12 件)

- (1) 石田政司, Diameter bounds under the Ricci Yang-Mills flows, 淡路島幾何学研究集会 2018、2018 年 1 月 26 日 阿那賀地区公民館
- (2) 石田政司, The Ricci flow on four-manifolds and the Seiberg-Witten equations, 京都大学談話会、2017 年 12 月 6 日、京都大学数理解析研究所
- (3) 石田政司, 4次元リッチフローにおける Sambusetti 型定理, 多様体上の計量と幾何構造、名城大学理工学部、2017 年 3 月 31 日
- (4) 石田政司, 4次元リッチフロー解に対する Sambusetti 型定理について、淡路島幾何学研究集会 2017、2017 年 1 月 27 日 国民宿舎慶野松原荘
- (5) 石田政司, The Ricci flow on four-manifolds and the Seiberg-Witten equations, Conference for the 70th Anniversary of Korean Mathematical Society. 2016 KMS Annual Meeting, 2016 年 10 月 20 日、Seoul National University, 韓国(ソウル)
- (6) 石田政司, Obstructions to the existence of non-singular solutions of the normalized Ricci flow on four-manifolds, Geometric Analysis on Riemannian and Metric Spaces, 2016 年 9 月 5 日、京都大学数理解析研究所
- (7) 石田政司, The Ricci flow on four-manifolds and the Seiberg-Witten equations, Conference on Differential geometry, 2016 年 7 月 5 日、Centre De Recherches Mathematiques, カナダ

(モントリオール)

- (8) 石田政司, 山辺不変量と Rosenberg 予想, 淡路島幾何学研究集会 2016, 2016 年 1 月 22 日, 淡路島国民宿舎慶野松原荘
- (9) 石田政司, Harnack estimates for the Ricci Yang-Mills flow, 淡路島幾何学研究集会 2015, 2015 年 1 月 23 日、淡路島国民宿舎慶野松原荘
- (10) 石田政司, Diameter bounds under the geometric flows, 第 9 回代数・解析・幾何学セミナー, 2014 年 2 月 18 日, 鹿児島大学
- (11) 石田政司, Yamabe invariant and a conjecture of Rosenberg on positive scalar curvature, 第 9 回日中友好幾何学研究集会 2013 年 9 月 1 日, 北海道大学
- (12) 都築正男, Existence of cusp forms with non-vanishing L -values, Zeta functions of several variables and applications, 2015 年 11 月 11 日, 名古屋大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石田政司 (ISHIDA MASASHI)
東北大学理学研究科教授
研究者番号: 50349023

(2) 研究分担者

都築正男 (TSUZUKI MASAO)
上智大学理工学部教授
研究者番号: 80296946