

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 18 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400077

研究課題名(和文) ラウンド手術を通してとらえる接触トポロジーの研究

研究課題名(英文) Contact topology from the view point of round surgery

研究代表者

足立 二郎 (Adachi, Jiro)

北海道大学・理学研究院・理学研究院研究員

研究者番号：20374184

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：接触構造は、古典力学や光学にも関連する重要な幾何構造です。そのような歴史的な背景とは別に、純粋な幾何構造としての研究は、微分トポロジーの研究対象として近年著しく発展しています。本研究計画では、これまで他の研究に使われていたラウンド手術という方法を、接触多様体に適用しました。これにより、これまで主に3次元多様体上の1階の接触構造に対してされていた研究を、高次元や高階の場合に拡張することが出来ました。今後もこの方法を用いることによって、様々な研究が展開されることが期待されます。

研究成果の概要(英文)：Contact structure is an important geometric structure, that is related to classical mechanics and optics. Apart from such a historical background, the study of contact structure as a pure geometric structure has been remarkably developed recently from the view point of differential topology.

In this research project, I applied the "round surgery" method to contact manifolds, that was used for other studies. As a result, I extended the studies which had been mainly done on contact structures of the first order on 3-dimensional manifolds to the cases of higher-dimension and higher-order. It is expected that various studies will be developed by using this method.

研究分野：微分トポロジー

キーワード：接触構造 ラウンド手術

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初も、現在も、接触・シンプレクティックポロジは、活発に研究されています。国内外を問わず、最も活発な幾何学の分野の一つと言っても良いでしょう。

本研究課題の申請のころ、Massot, Niederkruger, Wendl 達によって、高次元の多様体上の接触構造に対して、シンプレクティック充填可能性に対する障害が発見されました ([MNW])。また、Murphy による Loose Legendrian submanifold のホモトピー原理の研究が注目を集め始めていました。今から思えば、まさに高次元の接触構造の柔軟性の概念が生み出される前夜の状況でした。

また、Engel 構造を含め高階の接触構造に関しては、まだあまり注目されずに、研究も進んでいませんでした。

本研究課題の動機は、ラウンド手術を用いることによって、高次元、高階の接触構造の研究を統一的に捉えることにありました。それにより、高次元の柔軟性や Engel 構造の研究にも取り組めるという動機もありました。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は、接触ラウンド手術を用いることにより、高次元や高階の接触構造を統一的に捉える理論を創り出すことです。申請時に具体的に挙げたのは次の2点です。

(1) オープンブック型構造の再構築.

1階の接触構造は、オープンブック構造に対応することが知られています。しかし、Engel 構造などの高階の接触構造を扱うには、オープンブック構造では適切ではなさそうです。そこで、高階の接触構造を扱えるように、1階の接触構造のところから再構築したいということです。

(2) 過旋型の概念の拡張.

3次元1階の接触構造に対して、過旋というホモトピー原理の成り立つ柔軟なクラスの概念が知られています。高次元や高階の接触構造に対して、この柔軟性の概念を拡張したいと考えました。

3. 研究の方法

研究の方法としては、ラウンド手術の方法をうまく接触構造に適応させて、道具として使うということです。接触ラウンド手術の構成がひとつの研究の本質と思えます。

オープンブック型構造の研究のためには、まず3次元1階の接触構造で、接触構造をうまく表現できるか調べることを方針としました。

柔軟性の概念の拡張のためには、まず3次元1階の接触構造の過旋性をうまく表現して、それを一般化する方針をとりました。

研究の方法として、様々な分野の専門家たちとの直接の議論を想定しました。

4. 研究成果

本研究課題の主な成果としては次の3点と、進行中の研究における考察があります。

(1) 接触ラウンド手術による Lutzねじりの実現 ([A20])

3次元1階の接触構造の柔軟性は過旋性と呼ばれ、Lutzねじりと呼ばれる接触構造の局所的な改変でどんな接触構造も過旋となります。この操作は接触構造に横断的な結び目に沿って行われます。また、3次元球面上の接触構造の全ては、標準的なものからこの操作で構成できることが知られています。その意味でこの操作は3次元1階の接触構造の構成・分類に非常に重要です。

Weinstein による接触手術で、この操作は実現できることが知られていますが、接触ラウンド手術でも Lutzねじりを実現できることを示しました。Lutzねじりにはもう1種類、あるトラスに沿った改変であるものがあります。これは接触構造を必ずしも過旋にはしませんが、シンプレクティック充填可能性の障害になります。接触ラウンド手術を用いると、この操作も実現できることが判りました。これは、Weinstein の接触手術では出来ていない結果です。

本研究では、2つの Lutzねじりを統一的に扱うことのできる、コンパクト化された Lutz要素とい

うものを定義しました.このことにより Lutzねじりの見通しが非常に良くなったと評価を受けました.またこれは,高次元に一般化するためのよい手がかりとなりました.

(2) 接触ラウンド手術による Lutzねじりの高次元への一般化. ([A21])

上で得られた結果を元に高次元多様体上の接触構造の”Lutzねじり”を考えました.3次元の場合のLutzねじりは2種類でしたが,高次元では3種類の”Lutzねじり”を構成できました.次元の特殊性のために,3次元では2つのものが1つになっていたのです.このようなことが見えたのもラウンド手術の方法の優位性です.

この研究の背景として,非常に重要な研究結果がこの時期にアナウンスされたことがあります.

Borman, Eliashberg, Murphyたちの高次元に於ける接触構造の柔軟性です.接触ラウンド手術の手法を使って,いずれその研究に進もうと考えていたので,少し残念でした.しかし,それでこの研究の意味が無くなってしまったわけではなく,逆に,彼らの理論と私の手法の相性の良さを感じました.

接触ラウンド手術の方法を用いて得られた,接触構造の改変は次のようなものです.接触多様体は $2n+1$ 次元のものを考えます.

- 接触構造に横断的な円周に沿った改変で, [BEM]の過旋円盤の族をつくるもの,
- ある超曲面 $S^{2n-1} \times S^1$ に沿った改変で, [MNW] の $b\text{Lob}$ の族を作るもの.
- プリラグランジアンなトーラス T^{n+1} に沿った改変で, [MNW] の Giroux 領域を作るもの.

これらを,(1)の結果の”コンパクト化されたLutz要素”を高次元化したもの考えることによって構成しました.

これまでにない視点でうまくまとまっているので,接触トポロジーの研究者たちには概ね好評です. Murphyさんと話した時には良い反応でした. Eliashbergさんからは,これを使って,これまでに出来なかった問題が解けるのか尋ねられまし

た.現在ある問題への応用に取り組んでいて,それができるとさらに大きなインパクトになると思われます.

(3) トーラスが芯のプラスチックストウフェによる柔軟性の特徴付け. ([A22])

[BEM]による柔軟性の定義は抽象的で,実際には使いにくいものになっています.そこで様々な実用的な幾何学的特徴付けが研究されています.プラスチックストウフェというのは

Niederkrugerにより導入されたシンプレクティック充填可能性の障害です. [A21]の構成では芯がトーラスで,ある特殊なプラスチックストウフェができていました.そこで,これが柔軟性の必要十分条件であることを示しました.

これが良い特徴付けなのかは,まだよくわかりません.上の仕事の副産物的に出てきた成果です.

(4) Goursat 手術の考察.

高階の接触構造への理論の拡張も,本研究課題の目標ではありましたが,この方面は現在研究中です.高階の接触構造である

Goursat 構造をもった多様体のある特殊な手術の構成をしました.この方法は筋が良いのかは,まだわかりません.これを応用した研究をしながら考えています.

<引用文献>

[A20] J.Adachi, Contact round surgery and Lutz twists, (投稿中).

[A21] J. Adachi, Generalizations of twists of contact structures to higher-dimensions via round surgery, (arXiv:1610.09672,投稿中).

[A22] J. Adachi, Plastikstufe with toric core, (arXiv:1609.00837,投稿中).

[BEM] Borman, Matthew Strom; Eliashberg, Yakov; Murphy, Emmy Existence and classification of overtwisted contact structures in all dimensions. Acta Math. 215 (2015), no. 2, 281–361.

[MNW] Massot, Patrick; Niederkrüger, Klaus; Wendl, Chris Weak and strong fillability of higher dimensional contact manifolds. *Invent. Math.* 192 (2013), no. 2, 287–373.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 3 件)

- 1 足立 二郎, 接触ラウンド手術と Lutz 捻りについて, 数理解析研究所講究録 1948 (2015), 65–76. 査読なし.
- 2 Jiro Adachi, Contact round surgery and symplectic round handlebodies, *Internat. J. Math.* 25 (2014), no. 5, 1450050, 25 pp. 査読あり.
- 3 Jiro Adachi, Relative local equivalence of Engel structures, *Math. Z.* 273 (2013), no. 3-4, 711--733. 査読あり.

[学会発表](計 18 件)

- 1 Jiro Adachi, “Contact structure and Round surgery” 「Singularity theory and its applications」 2018 年
- 2 足立 二郎, “接触構造とその特性葉層について” 「葉層構造と微分同相群 2017」 2017 年
- 3 Jiro Adachi, “Flexibility and round surgery of contact structures” 「Geometric and Algebraic Singularity Theory」 2017 年
- 4 足立 二郎, “接触構造とその特性葉層について” 「微分幾何学と特異点論の応用」 2017 年
- 5 足立 二郎, “Engel 構造に関する話題について” 「幾何セミナー」北海道大学 2017 年
- 6 足立 二郎, “高次元の接触構造のねじれと過旋性について” 「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」 2017 年

- 7 足立 二郎, “接触多様体の充填可能性と過旋性について” 「特異点論セミナー」北海道大学 2016 年
- 8 足立 二郎, “トーラスが芯の plastikstufe と過旋性と高次元 Lutz 捻り” 「葉層構造と微分同相群 2016 研究集会」 2016 年
- 9 足立 二郎, “接触構造の過旋性のある特徴付けについて” 「トポロジー・特異点論とその応用」 2016 年
- 10 Jiro Adachi, “Contact round surgery and its application” 「Geometric singularity theory」 2015 年
- 11 足立 二郎, “接触ラウンド手術の応用をめざして” 「尾鷲微分トポロジー 2015」 2015 年
- 12 Jiro Adachi, “Round surgery and contact structure” 「Singularities in Generic Geometry and its Applications」 2015 年
- 13 足立 二郎, “接触ラウンド手術と接触構造のねじれについて” 「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」 2015 年
- 14 Jiro Adachi, “On contact round surgery” 「International workshop on Singularities, Geometry, Topology and Related Topics」 2014 年
- 15 足立 二郎, “接触ラウンド手術と Lutz 捻りについて” 「可微分写像の特異点論とその応用」 2014 年
- 16 足立 二郎, “接触ラウンド手術と Lutz ねじり” 「葉層構造と微分同相群 2014」 2014 年
- 17 足立 二郎, “接触円形手術とその応用について” 「尾鷲微分トポロジー 2013」 2013 年
- 18 足立 二郎, “ラウンド手術の接触構造への影響について” 「位相幾何・微分幾何と特異点論の関わり」弘前大学 2013 年

[図書](計 0 件)

なし.

[産業財産権]

なし.

[その他]

プレプリント:

1. Jiro Adachi, Contact round surgery and Lutz twists, (投稿中).

2. Jiro Adachi, Generalizations of twists of contact structures to higher-dimensions via round surgery, (arXiv:1610.09672, 投稿中).

3. Jiro Adachi, Plastikstufe with toric core, (arXiv:1609.00837, 投稿中).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

足立 二郎 (ADACHI, Jiro)

北海道大学・理学研究院・研究院研究員

研究者番号: 20374184

(2) 研究分担者

なし.

(3) 連携研究者

なし.

(4) 研究協力者

なし.