2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号： １１３０１
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2013～2015
課題番号： ２５４０００７８

研究課題名（和文） 実多項式写像の特異点の実変形、モノドロミーの分解および接触構造に関する研究

研究課題名（英文） Deformations of real singularities and decompositions of monodromies

研究代表者

石川　昌治（ISHIKAWA, MASAHARU）

東北大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：１０３６１７８４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：Brieskorn型の平面曲線複素特異点の複素共役変数による線形な変形は、一般にgeneric mapになることを証明し、さらに現れるカスプの数の評価を与えた。実孤立特異点については、特異値集合がカスプが１つのinnermostな単純閉曲線をもつような変形は存在しないこと、逆に、カスプの数が１でなければ、実変形が存在することを証明した。
また、安定写像と３次元多様体の幾何構造との関係に関して、Turaev の shadow と安定写像の Stein factorization を対応させることで、それらの複雑度が一致することを示し、さらに安定写像の複雑度により双曲体積の上下からの評価を与えた。

研究成果の概要（英文）：We proved that a linear deformation of a plane curve singularity of Brieskorn type realized by adding a complex-conjugate term yields a generic map in general and estimated the number of cusps appearing after the deformation. We also proved that there exists a deformation of a real isolated singularity whose singular value set has an innermost circle with k-cusps if and only if k is not equals to 1.
On relation between stable maps and geometric structures of 3-manifolds, focusing on the correspondence between Turaev's shadows and Stein factorizations, we introduced a notion of stable map complexity by counting the number of certain singular fibers and proved that it coincides with the branched shadow complexity. Using this coincidence, we gave an estimation of hyperbolic volumes of 3-manifolds from above and below by their stable map complexities.

研究分野： 特異点論、トポロジー

キーワード： 特異点の変形　安定写像　ハンドル分解　混合多項式

１．研究開始当初の背景

複素多項式写像の特異点は，エキゾチック球面に関する話題から代数幾何まで，幅広い分野で重要視される基本的な研究対象である．ミルナー束とは特異点を中心とする微小半径の球面内に現れるファイバー束のことであり，特異点の代数的，そして位相的性質を表す最も基本的な構造といえる．ミルナー束の構造は特異点が深く潰れているとそれだけ読みにくくなる．その複雑さを組み合わせ的な情報に置き換える手法が特異点のモース化である．複素特異点のモース化とは，多項式写像を微小変形して，複数のモース型特異点をもつ多項式写像に置き換える手法である．変形が微小であるためミルナー束の構造は保たれるが，ファイバー束のモノドロミーはモース特異点のモノドロミーの積に分解されるので，特異点の複雑さをモノドロミーの言葉に置き換えることが可能になる．複素特異点の場合は，各モース特異点のモノドロミーはデーン捻りであり，複数のモース特異点の間のモノドロミーの関係は，ホモロジーレベルでは Picard-Lefschetz 公式として知られている．

実多項式写像の特異点についても，孤立特異点であればミルナー束が存在することが Milnor により知られている．しかし，具体的にどのような例が存在するかは，それほど多くのことは知られていない．実多項式写像の特異点の変形の研究は安定写像の研究であり，Whitney, Thom, Mather らを起源とする重要な研究分野である．前述のようにミルナー束をもつ例がそれほど知られていないために，複素特異点のような特異点の変形からモノドロミーの分解を得るという研究はあまり進められていない．

近年，複素特異点論の研究において f¥bar g 型の特異点や混合特異点のように，複素変数を使って表される実特異点の研究が進められている．これは複素特異点の良い性質を活かした状態で，実特異点の研究を進めようという立場の研究である．f¥bar g 型の特異点とは，複素多項式 f と g に対し，g の共役 ¥bar g をとり，f と ¥bar g の積として得られる実多項式の作る特異点のことである．Pichon と Seade は，f¥bar g 型特異点の特異値が孤立しているならば，その特異点は孤立特異点であることを示した．つまりこの場合はミルナー束が存在することになる．特異値が孤立しているという条件は強い条件ではなく，実際，2 変数の場合にはほとんどの f¥bar g 型特異点は孤立特異点である．混合特異点は実多項式を複素変数と複素共役変数により表示し，それらから得られる 2 つのニュートン図形を使って実特異点の構造を調べる方法であり，これらのニュートン図形がある種の非退化条件を満たすならばミルナー束が存在することが示されている．

申請者は複素 2 変数の f¥bar g 型特異点のミルナー束と両立する接触構造についての研究を行い，それらは常に overtwisted であることを示した．それは f¥bar g 型特異点が複素特異点とは大きく異なることを意味するが，同時に f\bar g 型特異点のような良い性質を持つ実特異点であれば，複素特異点と同じ発想で研究を進められることを意味している．また，近年，低次元トポロジーにおいて，broken レフシェッツ束の研究が盛んになってきている．Broken レフシェッツ束とは，実 4 次元多様体から 2 次元多様体への，モース型特異点あるいは indefinite fold 特異点しか持たない写像が作るファイバー束構造のことである．通常の安定写像よりも特異点の制限が大きい一方で，任意の 4 次元多様体は broken レフシェッツ束を持つので，コントロール可能かつ汎用性が高いことから注目されている．これらの最近の研究の流れから，複素特異点のこれまでの研究と同様にして実多項式写像の特異点についてもその変形に着目し，ミルナー束の消滅サイクルの定式化，モノドロミーの分解の記述，消滅サイクルの相互関係などを特異点集合やハンドル分解などの手法で捉え，それらの情報から特異点の位相的性質やミルナー束と両立する接触構造を記述することが次の課題となる．

２．研究の目的

複素特異点のモース化によるモノドロミーの分解は，数学・物理の諸研究に現れる複素特異点を処理するための重要な手法である．特異点をモース特異点に変形すると，ミルナー束のモノドロミーは複数のモース特異点のモノドロミーに分解され，この分解から特異点の情報を読み取ることができる．一方，孤立特異点をもつ実多項式写像についてもミルナー束が存在するが，その変形によるモノドロミーの分解の研究はあまり進められていない．近年，混合多項式特異点に代表されるように，複素特異点の言葉を使った実特異点の研究が進められつつある．本研究の目的は，実特異点のミルナー束のモノドロミーの分解を特異点の変形から捉え，実特異点のモノドロミーの分解モデルを構築することである．

３．研究の方法

まず初めに，線形な因子の積で与えられる混合多項式の特異点を研究対象とし，その変形により得られる特異点集合，特異値集合の特徴付けを，一般論と具体的な変形の構成の両面から行う．一般論では安定写像の理論を用い，broken レフシェッツ束になる変形を作り出す．次にこの変形を元に，実特異点の変形から得られるある種のハンドル分解を導入し，ハンドルとモノドロミーの分解の関係を調べる．また，特異点解消グラフによるモ

ノドロミーの分解も同時に研究する．最後にその各々について接触構造を含めた考察を行い，実特異点の変形理論の一つのモデルを完成させる．

f¥bar g 型の特異点の変形について，線形な因子の積で与えられる混合多項式の特異点の変形を一般論と具体的な変形の構成の両面から行う．安定写像の一般論における実特異点の変形については，ヘッシアンによる安定写像の判定法を用い，どのような変形で安定写像が得られるのかを考察する．さらに broken レフシェッツ束への変形がいつ実現できるかについて考察する．低次元トポロジーにおいて，broken レフシェッツ束のモノドロミーやハンドル分解については幾つかの論文で考察が進められており，それを足掛かりとして研究を進める予定である．Broken レフシェッツ束の場合，特異値集合が曲線の埋め込みになる場合がモノドロミーの分解が読み易いので，必要に応じて，そのような変形の存在を示すか，あるいはそれを仮定して研究を進める． 分かりやすい目標として，実特異点版の Picard-Lefschetz 公式などを構成したい．さらに,特異点解消グラフによるモノドロミーの分解と接触構造の研究を行う．複素特異点の場合と同様に，ハンドルに接触構造を乗せることで，実特異点のミルナー束を接触構造を含めた形で考察し，実特異点の変形理論の一つのモデルを完成させる．

応用として，高次元接触多様体の overtwisted disk を実特異点のミルナー束をモデルとして導き出す．Overtwisted disk は 3 次元接触多様体が 4 次元シンプレクティック多様体の境界として得られることの位相的障害であり，その高次元版は Niederkruger 氏により提案されているが，本質的な定義であるかどうかは分かっていない．実特異点のミルナー束と両立する接触構造内に高次元版の overtwisted disk が発見されれば，それは Niederkruger 氏の定義に特異点論的な意味を与えるもので，重要な結果となる．反対に，より意味のある別の定義が見つかるという可能性もある．

４．研究成果

複素特異点および混合多項式特異点の安定写像への変形についての研究を行った．Brieskorn 型の平面曲線複素特異点に対し，複素共役な線形項を加えることで得られる実変形について，変形後に得られる写像は一般に generic map であることを示し，さらにそのカスプの数の評価を与えた．カスプの評価については，f(z,w)=z^p+w^q で与えられる特異点から線形な変形で安定写像を作った場合，そのカスプの数は (p+1)(q-1) と (p-1)(q+1) の間に収まる．Generic map であることの証明の手法は Levine の higher differential によりジェット空間内での横断性を代数的に確認するものであるが，具体的に扱うと計算はかなり煩雑なものとなる．Brieskorn 型の平面曲線特異点はモース特異点も含む．

また、実孤立特異点の変形から得られる特異値集合の形に関する研究を行った．複素孤立特異点の安定写像への線形な変形により特異値集合として得られるカスプ付き曲線は，ほとんどの場合は２重点をもつはめ込まれた曲線となる．そこでカスプ付きの単純閉曲線が特異値集合として得られるかについて考察し，カスプが１つの innermost な単純閉曲線は現れないことを示した．これは曲線を境界とする円盤上の自明束の存在から簡単に示すことができる．さらに，カスプの数が１以外のときにはそのような孤立特異点の変形が構成できることを示した．カスプが無い場合は稲葉氏の重み付き斉次混合多項式の孤立特異点の変形から得られる．カスプの 数 が ２ の 場 合 は Eliashberg と Mishachev の wrinkling がその例となる．カスプの数が３以上の場合は，上述の研究で扱った複素孤立特異点の線形な変形から得られることが確認できる．これで innermost なカスプ付き単純閉曲線の存在／非存在について完全に決定したことになる． 以上の研究は，東北大学の稲葉和正氏，東京理科大学の川島正行氏，Institute of Mathematics（ハノイ）の Nguyen Tat Thang 氏と共同で進めた．

また、安定写像の大域的な性質を捉えるため、Costantino-Thurston により用いられた shadow と安定写像の関係を基点として、３次元多様体内から平面への安定写像について研究した．Shadow とは３次元および４次元多様体を polyhedron により記述する方法であり，Turaev により導入された．安定写像との対応を考えるため，特に face に consistent な向きが定まっている branched shadow を扱う．３次元多様体の複雑さを測る不変量として，その３次元多様体を実現する branched shadow の頂点の数の最小値を branched shadow complexity と定義する．一方，安定写像に対しても，特別な特異ファイバーを重み付きで数え上げることで，stable map complexity という概念を導入する．今回の研究では，これら２つの complexity が一致することを示した．また，その系として，多様体および結び目に対して，その complexity の具体的な評価を与えた他，この complexity が多様体の双曲体積を上下から bound することを示した．以上の研究は広島大学の古宇田悠哉氏と共同で進めた．

他に，東北大学の根本啓介氏との共同で，shadow の３次元版である Matveev の spine についての研究を行い，２橋結び目補空間の spine を具体的に構成することで，補空間の Matveev complexity の良い評価を得た．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5　件）

①石川昌治、古宇田悠哉、Stable maps and branched shadows of 3-manifolds、Mathematische Annalen、査読有り、2016 年、DOI: 10.1007/s00208-016-1403-4

②石川昌治、根本啓介、Construction of spines of two-bridge link complements and upper bounds of their Matveev complexities、Hiroshima Mathematical Journal、査読有り、2016 年、印刷中

③石川昌治、稲葉和正、川島正行、Nguyen Tat Thang、On linear deformations of Brieskorn singularities of two variables into generic maps、Tohoku Mathematical Journal、査読有り、2016 年、印刷中

④石川昌治、稲葉和正、川島正行、Nguyen Tat Thang、A note on linear deformations of plane curve singularities、数理解析研究所講究録、査読無し、第 1948 巻、2015 年、77－84.

⑤石川昌治、Compatible contact structures of fibered positively twisted graph multilinks in the 3-sphere, Vietnam Journal of Mathematics、査読有り、第 42 巻、2014 年、273－293.
DOI: 10.1007/s10013-014-0066-2

〔学会発表〕（計　6　件）

①石川昌治、Milnor fibrations and their deformations in low-dimensional topology、The Asian Mathematical Conference、2013 年 7 月 2 日、Bexco、 釜山（韓国）

②石川昌治、Branched shadows and stable maps、ワークショップ「超曲面特異点とリンク多様体に関する幾何学」、2014 年 1 月 23 日、東京理科大学（東京）

③石川昌治、Branched shadow と安定写像、Topology mini Workshop、2014 年 3 月 20 日、日本大学文理学部（東京）

④石川昌治、3 次元多様体の安定写像と分岐シャドーについて、2014 年度日本数学会秋季総合分科会、2014 年 7 月 27 日、広島大学（広島）

⑤石川昌治、Stable maps and hyperbolic volumes of 3-manifolds、Singularities in Generic Geometry and its Applications ― Kobe-Kyoto 2015 (Valencia IV) ―、2015 年 6 月 9 日、京都大学数理解析研究所（京都）

⑥石川昌治、Stable maps and branched shadows of 3-manifolds 、The 3rd Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities、Institute of Mathematics、2015 年 12 月 4 日、ハノイ（ベトナム）

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
石川　昌治（ISHIKAWA MASAHARU）
東北大学・理学研究科・准教授
研究者番号：10361784

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：