

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 26 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400079

研究課題名(和文)位相空間論および幾何学的トポロジーを用いた位相力学系の研究

研究課題名(英文)Study of dynamical systems by use of general topology and geometric topology

研究代表者

加藤 久男 (KATO, HISAO)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：70152733

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者は写像のeventual coloring number(色彩数)の評価公式を得ることで、色彩数理論の研究を飛躍的に発展させることに成功した。さらに応用として、局所コンパクト空間上の任意の連続写像について、その周期点の状況を最適に保存するコンパクト化が存在することを証明した。また、あるゼロ次元周期点集合をもつ力学系において、最近の物理学に登場するダーク・マターにヒントを得たダーク空間を定義し、全体空間がダーク空間でほとんど覆われていることを証明した。これらの結果は、幾何学的トポロジーおよびカオス的な力学系理論研究の進展に大きく貢献する結果となった。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied eventually coloring numbers of maps and evaluated the numbers. We obtained some important theorems of the numbers. Moreover, as applications of the theorems, we proved that for any map on any locally compact space, there exist a nice compactification of the space and a nice extension of the map which preserves the conditions of the periodic point set. Also, we introduced the notion of dark space like dark matters of physics, and we proved that if an n -dimensional system has the zero-dimensional periodic point set, then the system can be decomposed into an $(n-1)$ -dimensional dark space and a dense zero-dimensional bright space. These results are very important in the theories of geometric topology and chaotic dynamical systems.

研究分野：数物系科学

キーワード：彩色数 カオス エントロピー 位相力学系 幾何学的トポロジー アトラクター フラクタル次元
連続体論

1. 研究開始当初の背景

研究代表者と連携研究者は、主に連続写像の位相力学的性質の研究を行っている。本研究テーマでは、対象とする空間として一般のコンパクト距離空間・可分距離空間を取り扱う。この場合、通常の微分可能性を仮定した力学系理論とはかなり異なったカオスが現れる。現在、力学系において色々なカオス写像が考察されている。transitive, sensitive, chaos of Li-Yorke and Devaney, 正のエントロピーを持つ写像、拡大同相写像、連続体的同相写像などが代表的なものである。拡大的力学系とは、微少な観測値の相違が過去または未来のある時刻に明確な違いとなって現れる力学系のことで、位相力学系・エルゴート理論では特に重要な概念である。連続体的拡大同相写像の概念は拡大同相写像とパイコね変換を一般化したものであり、研究代表者によって定義された。これまでの研究で拡大同相写像の存在に関する一連の定理、カオス連続体の存在定理、平面内のカオス連続体の indecomposable 構造に関する定理などを証明した (Fund. Math., Trans. AMS., Topology Appl., Pacific J. Math., Canad. J. Math., 岩波数学辞典 (4 版) など)。Indecomposability は、連続体論の中心的課題として Knaster, Kuratowski, Bing などによって研究されてきた。近年、力学的複雑さが幾何学的な複雑となって現れる典型的な構造として indecomposability が注目され、その重要性が認知されている (多くの場合、不安定集合と indecomposable 連続体の composant が一致する構造となって出現する)。研究代表者は、位相エントロピーの評価から hereditarily indecomposable continua 上には拡大同相写像は存在しないことを証明した (Proc. AMS)。また、空間の位相次元と box-counting dimension との関係を決定的に決定する距離の構成に成功し、空間の距離の構造と box-dimension との関係

を完全に決定する定理を得た (J. Math.Soc.Japan)。ランダムな無限点列を可算個与えると、それを実現する力学系が測度保存力学系全体の中で稠密に存在していることを示した。つまり、エネルギーが保存されている力学系では任意の可算個の点列は、現在の状態をほんの少し変化させるだけで、時間を追って実現可能であることを証明した。同様の結果が flow においても成立することを証明した (Topology Appl.)。また研究代表者はフラクタル幾何学と連続体論で重要な regular curve 上の piecewise embedding maps に関する位相エントロピーの計算公式を得た。区間の場合は、Misiurewicz-Szlenk および Young のラップ数による表現定理として著名であるが、我々の結果は彼等の結果を区間からある種のフラクタル集合上に拡張した定理と考えられる (Ergodic Theory and Dynamical Systems, Topology Appl., Topology Proc.)。またこの方面の大きな未解決問題として、正のエントロピーをもつ同相写像を許容する 1 次元連続体で、どのような連続体が indecomposable 連続体を含むか、という問題が残されていた。

2. 研究の目的

研究の取り組むべき第一の課題は、トポロジーと位相力学系に関わる多くの問題のうちでコンパクト距離空間の連続写像のカオス性についての問題、特にカオス力学系の核になる空間の indecomposability 性について詳しく研究することである。最近、研究代表者は正のエントロピーをもつ同相写像を許容するグラフ・ライクな連続体は indecomposable 連続体を含むことを証明した。ここで用いられた手法を他のカオス力学系の問題に応用することを考えた。フラクタル集合上の一般的な写像の位相エントロピー評価、Menger 多様体上のカオス写像 (minimal homeomorphism,

expansive homeomorphism...など)の存在問題も本研究課題で究明していきたい重要な問題であった。また、normal sequence から導かれる距離と Hausdorff dimension との関係は、box-counting dimensionと同様に密接に結びついていると予想される。距離に応じて Hausdorff dimension は上からの評価が可能であるが、下からの評価に大きな課題を残している。予想ではあるが、位相次元を表す normal sequence の subsequenceの適当な構成から導かれる距離で、Hausdorff dimension と box-counting dimension は任意の値を取れると予想している。

3 . 研究の方法

本研究の学術的な特色・独創的な点は、可分距離空間とその上の連続写像という非常に一般的な研究対象を、幾何学的トポロジー（特に、連続体論）位相空間論、力学系理論およびエルゴート論を駆使して総合的に研究することである。位相力学系、連続体論および位相空間論の方法論を融合して可分距離空間上の力学系の原理的な構造の解明に役立つことである。位相空間論からの研究という基本原理に立ち返った研究方法は、本研究の大きな特色でもある。位相空間論は、対象とする空間の種々の問題を最も理想的・抽象的な形で設定するための概念・手法を提供する。最も基本的な原理原則からの本質を見極めた研究が可能となる大きな利点をもつ。

4 . 研究成果

空間の彩色問題は平面の4色問題などでよく知られている。本研究では主に連続写像の彩色問題を研究した。この方面の研究では、古くは Lusternik-Schnirelman-Borsuk による次の定理が知られている； n -次元球面上の任意の $(n+1)$ 個の閉集合からなる被覆には、antipodal points を含む閉集合が少なくと

も1つ存在する。この定理は、その後 Erdos, Katetov, Frolic, Van Douwen らによって連続写像の彩色（色付け、coloring）問題として定式化されていた。また、彩色数(coloring number)と位相次元との関連研究について、Arts, Fokkink, Vermeer, Buzyakova, Chigogidze などの優れた研究が知られていた。研究代表者は最近、位相力学系な発想から eventual coloring number の概念を新たに導入しその評価公式を得ることで、この方面の研究を飛躍的に発展させることに成功した(J. Mat. Soc. Japan, Topology Proc., Topology Appl., Sci. Math. Japonicae)。同相写像の0次元力学系への持ち上げで、その factor map が finite-one になるものを構成した(Topology Appl.)。局所コンパクト空間上の任意の連続写像について、その周期点集合を‘最適’に保存するコンパクト化が存在することを証明した(Topology Appl.)。あるカオス的な力学系(たとえば0次元周期点集合をもつ力学系)において、最近の物理学に登場するダーク・マターにヒントを得たダーク空間を定義し、全体空間がダーク空間でほとんど覆われていることを証明した(Topology Appl.)。関数解析への応用として、Banach の著名な‘等長埋め込み定理’を更に発展させた定理を得た；つまり、任意の可分距離空間 X はヒルベルト立方体上の関数空間 $C(Q)$ に等長的に埋め込み可能で、さらに任意の point-wise bounded な X 上の等長変換群は $C(Q)$ 上の等長線形変換群に自然に拡張される(Comment. Math. Univ. Carolin.)。最近、適当な disjoint cells property を持つ空間への continuum-wise injective map 全体が G -デルタ稠密性をもつことを証明した(Topology Appl.)

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 9 件)

- (1) E.Matsushashi and H.Kato, Continuum-wise injective maps, *Topology Appl.* 査読有, 202 (2016), 410-417.
- (2) A. Ebisawa and H.Kato, Colorings for set-valued maps, *Scientiae Mathematicae Japonicae* 29 (Online e-2016) 査読有, 2016-8, p.1-10.
- (3) Y.Ikegami, H.Kato and A.Ueda, On eventual coloring numbers, *Topology Proceedings* 査読有, 47 (2016), 1-14.
- (4) M.Hiraki and H.Kato, Dynamical decomposition theorems of homeomorphisms with zero-dimensional sets of periodic points, *Topology Appl.* 査読有, 196 (2015), 54-59.
- (5) H.Kato, On isometrical extension properties of function spaces, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 査読有, 56,1(2015), 105-115.
- (6) H.Kato, A note on metric compactifications and periodic points of maps, *Topology Appl.* 査読有, 160 (2013), 1406-1409.
- (7)H.Kato, Periodic points, compactifications and eventual colorings of maps, *Topology Appl.* 査読有, 160 (2013), 685-691.
- (8) Y.Ikegami, H.Kato and A.Ueda, Dynamical properties of finite-dimensional metric spaces and zero-dimensional covers, *Topology and its Appl.* 査読有, 160 (2013), 564-574.
- (9)Y.Ikegami, H. Kato and A.Ueda, Eventual colorings of homeomorphisms, *J. Math. Soc. Japan*, 査読有, 65, No 2 (2013), 375-387.

〔学会発表〕(計 11 件)

- (1) 加藤久男, Topological entropy and indecomposability of continua, 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, 中国 Minnan Normal university, 2015, Nov. 28.
- (2)加藤久男, 研究集会「集合論的位相幾何学および幾何学的トポロジーの最近の動向と展望」位相力学系における分解不可能性, 京都大学数理解析研究所、京都府京都市 2015, 11月17日
- (3)加藤久男, On dynamical properties of maps with 0-dimensional sets of periodic points, Shantou University, China 2015, Nov. 24.
- (4)加藤久男, Positive topological entropy and indecomposability, International Conference on Set-Theoretic Topology and its applications, 神奈川大学、神奈川県横浜市 2015年8月24日.
- (6)加藤久男, Dynamical properties of maps with zero-dimensional sets of periodic points, 30th Summer Conference on Topology and its applications, Galway in Ireland, 2015, June 23.
- (7)加藤久男, Dynamical properties of maps and periodic points, 「12th Annual Workshop on Topology and Dynamical Systems」Canada, Nipissing University, 2015, May 29.
- (8)加藤久男, Chaos and indecomposability of continua, 「12th Annual Workshop on Topology and Dynamical Systems」Canada, Nipissing University, 2015, May 28.
- (9)加藤久男, 位相力学系における分解定理, 「集合論的及び幾何学的トポロジーの現状とその展望」京都大学数理解析研究所、京都府京都市 2014, 10月23日.
- (10)加藤久男, Isometrical extensions of

bounded isometries of separable metric spaces in the function spaces, 「集合論的及び幾何学的トポロジーの現状とその展望」京都大学数理解析研究所、京都府京都市 2013年10月17日.

(11)加藤久男, Eventual colorings of maps and Wallman compactifications, 島根トポロジー国際会議、島根大学、島根県松江市 2013年9月4日.

6. 研究組織

(1)研究代表者

加藤久男 (KATO Hisao)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：70152733

(2)連携研究者

川村一宏 (KAWAMURA Kazuhiro)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：40204771

連携研究者

石井敦 (ISHII Atsushi)

筑波大学・数理物質系・講師

研究者番号：00531451

連携研究者

丹下基生 (TANGE Motoo)

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：70452422