

令和元年6月5日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2018

課題番号：25400081

研究課題名(和文)ホモトピー代数的構造を持つ圏の幾何学への応用

研究課題名(英文)Applications of homotopy algebraic categories to geometry

研究代表者

梶浦 宏成 (Kajiura, Hiroshige)

千葉大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：30447891

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：幾何学の代数的不変量として、幾何学的対象に対してA圏を構成すること、そしてそのA圏から得られる三角圏の性質についての研究を行った。例えば、ホモロジー的ミラー対称性予想の定式化において使われるシンプレクティック多様体上の深谷圏のA構造を、トーラスファイバー束のミラー対称性の設定において、ホモロジー的ミラー対称性が成り立つように具体的に構成する方法を提案した。そしてシンプレクティック多様体が2次元トーラスの場合においてそれを具体的に実行し、そのA構造の三角圏構造との関係について議論した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

幾何学、代数幾何学と表現論の間でホモロジー的ミラー対称性予想と呼ばれるものが盛んに研究されている。現在この定式化についての一般論について非常に発展させられている状況であるが、それに比べ、その定式化において使われているA圏構造が具体的に構成されることは少なく、またそれと関連して、そのようなA圏、およびそれから得られる三角圏がなぜよい定式化であるのかということに関しては考察が不足しているように思われる。本研究はこのような側面について一歩ずつ理解を深めるためのものである。

研究成果の概要(英文)：As an algebraic invariant of geometry, we studied associating A-infinity categories to geometric objects and various properties of triangulated categories constructed from their A-infinity categories. For example, we discussed a way of constructing an A-infinity structure of the Fukaya category of a symplectic manifold in the setting of mirror symmetry of torus fibrations so that the homological mirror symmetry hold true. We in addition proceeded this construction when the symplectic manifold is a two-torus, and discussed a relation of the A-infinity structure with the triangulated structure.

研究分野：幾何学

キーワード：ホモトピー代数 ミラー対称性 三角圏

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

ミラー対称性の圏論的定式化として、ホモロジー的ミラー対称性予想というものが提案された (M. Kontsevich, 1994). 現在までこれについて様々な例が肯定的に議論されてきているが、(1) その圏論的定式化がよい定式化なのか、(2) また、なぜホモロジー的ミラー対称性が成り立つことが期待できるのか、ということについての根本的理解が不足している状況にある。

### 2. 研究の目的

上の2つの問題について、一般論、具体例の両面から、ホモトピー代数的手法を使って理解を進めることを目的とする。

### 3. 研究の方法

(1)について: ホモロジー的ミラー対称性はシンプレクティック多様体上の深谷 A 圏 (K. Fukaya, 1993) とそのミラー双対な複素多様体上の接続層の導来圏の間の同値性を主張する。接続層の導来圏は三角圏を成すが、それを深谷圏と比べるために、一般に A 圏から三角圏を構成する方法が提案されている (M. Kontsevich, 1994)。これを使って、ホモロジー的ミラー対称性は深谷 A 圏から得られる三角圏と接続層の成す導来圏の三角圏同値として定式化される。この定式化は、いくつかの例でこの予想が肯定的に議論されているという意味では妥当なものである。しかし一般に A 圏から三角圏を得る際にいくらか情報を捨て去ることになる。ここで、どのような情報が失われるのかということが気になってくる。このことについて、一般論、具体例の両方から研究する。

(2)について: 現在ホモロジー的ミラー対称性が、それが成り立つべき根本的理由がみえる形で議論できるのがトラスファイバー束のミラー対称性の設定において、深谷 A 圏から接続層の導来圏の DG 増強の充満部分圏へモースホモトピー由来の A 関手を構成する方法である (M. Kontsevich - Y. Soibelman, 2000) が、この方法はいまのところの安直な設定では部分的にうまく定義できない部分がある。これについて、すべてうまく定義できるような枠組に改良することと、また現時点の設定でちょっとした工夫を施すだけでうまくいくような具体例を構成することの両面から研究を行う。

### 4. 研究成果

(1)について: 以下の文献 ``On A -enhancements for triangulated categories, '' では、これに関して、まったく情報が失われないような A 圏と、情報が失われるような A 圏の例を議論した。特に、この論文では例として、比較的性質のよい順序付き A 圏と呼ばれるものを考えた。ただし、情報が失われるような順序付き A 圏の例については、議論にギャップがあることが分かり、修正する必要がある。当時はこのような方向性の研究が比較的少なかったが、最近情報が失われる A 圏について他の例が構成される (A. Rizzardo - M. van den Bergh, 2017, プレプリント) など、盛んになりつつある。

(2)について: 文献 ``On some deformations of Fukaya categories, '' では上述のモースホモトピー由来の A 関手の構成法を、より具体的に実行しやすい形で定式化し、またその副産物としてホモロジー的ミラー対称性の設定のある変形が考えられることについて議論した。この変形は過去に私自身が議論した非可換トラスのホモロジー的ミラー対称性の一般化にあたる。

また具体例としては2次元トラスのミラー対の場合について上述の構成を具体的に実行した (プレプリント: arXiv:1811.12665, 2018)。これは高次の A 構造が非自明な深谷圏の A 構造を具体的に構成したはじめの例であるといえる。また、A 構造が具体的に決定されていることから、対応する三角圏構造を具体的にみることができ、そのような応用についても議論している。

その他: ホモトピー代数的構造の幾何学への応用のひとつとして、文献 ``Cyclicity in homotopy algebras and rational homotopy theory, '' では可換構造付きの A 代数である C 代数の有理ホモトピー論への応用について議論した。そのような応用についてはもともと (T. Kadeishvili, 2008, プレプリント) などで議論されていたが、上の論文では特に、サイクリックな C 代数がポアンカレ双対性を持つ有理ホモトピー型を分類することを議論した。この方法により、コホモロジーを固定したときにその上の極小 C 代数構造を分類することで、そのコホモロジーを持つ有理ホモトピー型が分類できる。サイクリックな場合でこのようにして分類できる有理ホモトピー型の新しい例をいくつかあげることにより、この方法がコホモロジーを固定した有理ホモトピー型の分類に関して非常に有用であることを示した。

### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 3 件)

Hiroshige Kajiura,  
``Cyclicity in homotopy algebras and rational homotopy theory,``  
Georgian Mathematical Journal 25.4 (2018) 545-570 (査読有).

Hiroshige Kajiura,  
``On some deformations of Fukaya categories,``  
Symplectic, Poisson, Noncommutative Geometry,  
MSRI Publications 62(2014) 93-130 (査読有).

Hiroshige Kajiura,  
``On  $A_{\infty}$ -enhancements for triangulated categories,``  
J. Pure Appl. Algebra 217 (2013) 1476-1503 (査読有).

[学会発表](計 5 件)

梶浦 宏成,  
``有限次元  $A_{\infty}$  代数の表現論,``  
第 63 回代数学シンポジウム,  
東京工業大学本館地階 H101 講義室,  
2018 年 9 月 5 日 (13:30--14:30).

梶浦 宏成,  
`` $A_{\infty}$  代数の幾何学への応用のいくつかについて,``  
第 64 回トポロジーシンポジウム,  
東海大学高輪キャンパス 2 号館 2 B101 教室,  
2017 年 8 月 22 日 (16:30--17:30).

Hiroshige Kajiura,  
``More on  $A_{\infty}$ -enhancements of triangulated categories,``  
conference: Primitive Forms, Mirror Symmetry and  
Related topics 2014,  
Room 127 (Building no.3),  
Department of Mathematics, Kyoto University,  
December 24, 2014 (14:30--15:30).

梶浦 宏成,  
``ホモロジー的ミラー対称性に関連する DG 圏の非可換変形について,``  
研究会「空間の代数的・幾何的モデルとその周辺 2014」  
信州大学理学部第一講義室,  
2014 年 9 月 18 日 (10:00--11:00).

梶浦 宏成,  
``On  $A_{\infty}$ -enhancements for triangulated categories,``  
RIMS 共同利用研究会「ミラー対称性の展望」  
京都大学数理解析研究所, 111 室,  
2013 年 12 月 24 日(火) (14:15--15:15).

[図書](計 0 件)

[産業財産権]  
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者：なし

### (2) 研究協力者

研究協力者：なし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。