

平成 30 年 6 月 20 日現在

機関番号：12614

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400084

研究課題名(和文)多様体の変換群と同変行列式

研究課題名(英文)THE GROUP ACTIONS ON MANIFOLDS AND THE EQUIVARIANT DETERMINANT OF ELLIPTIC OPERATORS.

研究代表者

坪井 堅二 (TSUBOI, KENJI)

東京海洋大学・学術研究院・教授

研究者番号：50180047

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：概複素多様体上の有限群作用の存在に対する必要条件を与えた。この結果は2013年6月にJ. Math. Soc. Japan, Vol.65-3(2013)に掲載された。また、ある種の素数 p と r に対し、交換子部分群の位数が素数 p の倍数となっている非可換有限群は種数 r の開リーマン面に作用できないことを示した。この結果は2014年6月に研究会「服部先生を偲ぶ会」の招待講演において発表した。また、全ての次元の向き付けられた多様体に対して有効な有限群作用の存在に関する必要条件を与えた。この結果は昨年7月に投稿し、レフェリー意見のもとで複数回修正を行っているが掲載決定の通知は未だ来ていない。

研究成果の概要(英文)：Firstly we obtain a necessary condition for the existence of finite group actions on almost complex manifolds, where the action is assumed to preserve the almost complex structure and the fixed points of the action is assumed to be isolated. The condition above contains the condition of Harvey for compact Riemann surfaces. This result is published in J.Math. Soc.Japan, vol.65-3, p.797-827 at June, 2013. Secondly we show that the C_p groups can act on Riemann surfaces of genus r for some p, r , where C_p group is a finite group such that the order of the commutator subgroup is a multiple of the prime number p . Thirdly we obtain a necessary condition for the existence of finite group actions on oriented manifolds, where the action is assumed to preserve the orientation and the fixed points of the action is assumed to be isolated. The condition above contains the condition of Harvey for compact Riemann surfaces.

研究分野：微分位相幾何学

キーワード：概複素多様体 向き付けられた多様体 有限群作用 楕円型作用素 同変行列式

1. 研究開始当初の背景

可微分構造, 概複素構造, スピン構造等の多様体の幾何的構造に対して, その構造を保つ変換群にはどのような種類のものがあり, それらがどのように多様体上に作用するかという問題は幾何学における最も重要な問題の一つであるが, この問題を扱うための一般次元でも有効な統一的方法は今まで存在していなかった. 唯一統一的方法が知られているのは (コンパクトな) リーマン面の場合であり, W. J. Harvey, Cyclic groups of automorphisms of a compact Riemann surface, Quart. J. Math., Vol. 17 (1966), 86-97, S. P. Kerckhoff, The Nielsen realization problem, Ann. of Math., Vol. 117 (1983), 235-265, E. Bujalance, F. J. Cirre, J. M. Gamboa and G. Gromadzki, On compact Riemann surfaces with dihedral groups of automorphisms, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 134 (2003), 465-477 等において, どのような群がリーマン面の変換群として作用し, その作用はどのようなものになるかが系統的に研究されている. リーマン面の場合は複素構造を持ち, またリーマン面自身の構成法も知られているために上記の統一的结果が得られたが, 一般次元の多様体の場合は統一的方法などあるはずもなく, 変換群を調べるための統一的方法など存在しないものと思われていた. そのような状況の中で, K. Tsuboi, The finite group action and the equivariant determinant of elliptic operators, J. Math. Soc. Japan, vol. 57 (2005), 95-113 において, 一般次元における楕円型作用素 D の同変行列式という変換群 G から複素数への準同型写像が $\text{Det}(g) = \det(g|_{\ker D}) / \det(g|_{\text{coker } D})$ (g は G の元) によって定義され, G 作用に対する制限条件を与えることが示された.

2. 研究の目的

多様体上に有限群が作用するとき, その多様体上の有限群作用と可換な楕円型作用素の同変行列式を用いて, 有限群作用の作用の仕方, あるいは, 有限群作用自体の存在・非存在を調べる方法を確立することを目的とする. 最初に符号作用素を用いて, 有限群が多様体の向きを保ち, 固定点集合が点のみからなる場合の方法を確立する. 次に, ドルボー作用素を用いて, 有限群が概複素多様体に作用し, 固定点集合が次元を持つ場合の方法を確立する. 最後に有限群作用が多様体の向きを保ち, 固定点集合が次元を持つ場合の方法を確立する.

3. 研究の方法

K. Tsuboi, J. Math. Soc. Japan, Vol. 57 で得られた楕円型作用素の同変行列式は多様体に作用する有限群から実数/整数への加群準同型写像 ID を与え, また, 固定点の周りの群作用の状況を用いて表され

る. 従って, 加群準同型写像としての性質 $ID(gh) = ID(g) + ID(h)$, $ID(g^z) = zID(g)$ などは固定点の周りの有限群作用の状況に対する制限条件を与えることによって有限群作用そのものの存在に関する必要条件を与える. 本研究においては, 概複素多様体の場合には楕円型作用として (ベクトル束に値を持つ) ドルボー作用素を用い, 向き付けられた多様体の場合には (ベクトル束に値を持つ) 符号作用素の同変行列式を用いることにより, 有限群作用の存在に関する必要条件を与え, それを用いて有限群作用の非存在を証明する. このとき, 異数が p である有限群の要素 g に対して, $p \cdot ID(g) = ID(g^p)$ は整数になるから, この整数性条件を保つ必要条件を与えなければならない.

4. 研究成果

Kenji Tsuboi, The finite group action and the equivariant determinant of elliptic operators, The finite group action and the equivariant determinant of elliptic operators, J. Math. Soc. Japan, Vol. 57 (2005), p. 95-113. において, 楕円型作用素の同変行列式を偶数次元閉多様体上の有限群作用の固定点情報に対して用いることにより, 群作用の存在に対する制限を与える方法が与えられた. 有限群が概複素多様体上に概複素構造を保つように作用し, 固定点集合が孤立点達からなる場合, 各固定点の周辺における作用の回転角が定義されるが, 上記の K. Tsuboi, J. Math. Soc. Japan, Vol. 57 の方法を概複素多様体上のベクトル束に値を持つドルボー作用素の同変行列式に対して用いることにより, 回転角に対する制限条件を与え, それによって有限群作用の存在に関する整数性条件を保つ必要条件を与えた. この結果は全ての次元の概複素多様体に対して有効であり, 閉リーマン面に対して知られている Harvey の条件の一般化となっている. また, この結果を用いて 4 次元や 6 次元の閉概複素多様体上の有限群作用に関して新しい結果を与えた. この結果は 2013 年 6 月に Kenji Tsuboi, J. Math. Soc. Japan, Vol. 65-3 (2013), p. 797-827 に掲載

された。

非可換有限群の閉リーマン面への作用の存在に関しては左記の E.Bujalance, F.J.Cirre, J.M.Gamboa and G.Gromadzki による二面体群に対する結果のように特定の非可換有限群についての結果しかなかったが, 上記の K.Tsuboi, J.Math.Soc. Japan, Vol.57 の方法を用いて, $p=5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89$, $r=kp+(p-1)/2$, $k=0, 1, \dots, (p-1)(p-2)/(2p)$ のとき, p 次巡回群は種数 r の閉リーマン面に作用できるが, 交換子部分群の位数が p の倍数である非可換有限群(例えば, 二面体群)は作用できないことを示した。この結果は 2014 年 6 月に開催された研究集会「服部先生を偲ぶ会」の招待講演において発表した。

上記のように, 概複素多様体の場合は作用の回転角を用いて K.Tsuboi, J.Math.Soc. Japan, Vol.57 の方法を用いることにより, 有限群作用の存在に対する全ての概複素多様体に対して有効な必要条件を得ることができたが, 概複素構造を持つとは限らない一般の向き付けられた多様体上の有限群作用の場合には一意的に決まる回転角は存在しないため, 概複素多様体の場合に用いた方法は使えない。このような状況の中で, D.B.Zagier, Equivariant Pontrjagin Classes and Applications to Orbit Spaces, Lecture Notes in Math., 290 による cotangent 積の和の整数性を示す結果を一般化することによって, 上記の Kenji Tsuboi, Soc. Japan, Vol.57(2005) で得られた同変行列式を群作用の制限として用いる方法が使えることがわかり, 有限群作用が向き付けられた閉多様体上に向きを保つように作用し固定点集合が孤立点達からなるという状況下において, 全ての偶数次元の向き付けられた閉多様体に対して有効で Harvey の条件を含む有

限群作用の存在に関する整数性条件を保つ必要条件を与えることに成功した。また, この結果を用いて 4 次元と 6 次元の向き付けられた閉多様体上の有限群作用に関して上記の K.Tsuboi(2013) の方法からは得られない新しい結果を与えた。この結果は昨年 7 月に投稿し, レフェリー意見のもとで 2 回修正を行っているが掲載決定の通知は未だ来ていない。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

K.Tsuboi, The finite group action and the equivariant determinant of elliptic operators II, J. Math. Soc. Japan, Vol.65-3(2013) (査読あり)

[学会発表](計 1 件)

研究集会「服部先生を偲ぶ会」(招待講演)
坪井堅二, ラプラシアンから楕円型作用素へ,
2014 年 6 月

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織
(1) 研究代表者

坪井 堅二 (TSUBOI, Kenji)
東京海洋大学・学術研究院・教授
研究者番号：50180047

- (2)研究分担者
無し ()
研究者番号：
- (3)連携研究者
無し ()
研究者番号：
- (4)研究協力者
無し ()