

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 15 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400085

研究課題名(和文) 葉層構造における指数定理の展開

研究課題名(英文) Development of the index theorem on foliated manifolds

研究代表者

森吉 仁志 (Moriyoshi, Hitoshi)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：00239708

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：第一に、カントール集合やシェルピンスキーガasketなどのフラクタル集合上へ指数定理を拡張した。第二に、非可換幾何の枠組を用いてAtiyah-Patodi-Singer 指数定理を境界付多様体の正規被覆空間上に拡張し、一般の巡回コサイクルとK群のペアリングを与える指数定理を証明した。第三に、Gerbe の特性類である Dixmier-Douady 類と葉層の特性類である Godbillon-Vey 類が、Cheeger-Chern-Simons 不変量を通じて結びつくことを明らかにし、円周の微分同相群の中心拡大をCalabi 不変量を用いて記述することに成功した。

研究成果の概要(英文)：First, we extended the index theorem to fractal sets such as the Cantor set and the Sierpinski gasket. Second, by exploiting the framework of Noncommutative Geometry we generalized the Atiyah-Patodi-Singer index theorem to a Galois covering of compact manifold with boundary, which gives a formula for the pairing between K-group and cyclic cohomology. Third, we clarified the relation of the Dixmier-Douady class and the Godbillon-Vey class, which respectively appears as a characteristic class for Gerbe and foliated circle bundles. It turned out that they are connected via the Cheeger-Chern-Simons invariant. As a byproduct we succeeded to describe the universal central extension of circle diffeomorphism group in terms of the Calabi invariant.

研究分野：位相幾何, 非可換幾何

キーワード：指数定理 非可換幾何 葉層多様体 Godbillon-Vey 不変量 K理論 巡回コホモロジー

1. 研究開始当初の背景

多様体の幾何不変量(オイラー数・符号数・L種数・bA種数など)に関する深い定理のひとつに Atiyah-Singer 指数定理 [Atiyah-Singer, Ann. of Math. 87(1968)] がある。指数定理とは多様体の解析不変量と幾何不変量を結びつける数学公式であり、性質が全く異なる二つの不変量を関連付けているという点でその有用性は著しく高い。例えば L 種数や A^k 種数の整数性定理(種数本来の定義からは有理数であることしか判らない)や、正スカラー曲率を持つ閉スピン多様体の A^k 種数が消滅するという事実などは、指数定理の帰結として得られる著しい結果である。一方 A. Connes は、1980 年代後半に非可換幾何学という新しい枠組を提起した [Publ. Math. IHES, 62 (1986)]。そこには大きな枠組による指数定理の拡張という動機があったと考えられる。非可換幾何学は、微分幾何学・位相幾何学・作用素環論・エルゴード理論・大域解析学にまたがる広い分野に多大な刺激を与えており [Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994], さらに弦理論・素粒子論などにおいても有効性が認識され、研究が急速に進展しつつある。Connes は作用素環論・K 理論・巡回コホモロジー群などの新しい手法を非可換幾何学に導入して、葉層多様体・エルゴード的群作用を許す多様体・非コンパクト等質空間、有限幾何性をもつ完備リーマン多様体などに対して指数定理を拡張した。このような一般化は従来の幾何的手法では成し得なかった成果である。さらに Baum, Higson, Moscovici, Roe, Skandalis 等はその手法を発展させて、位相幾何学における長年の懸案である Novikov 予想や Gromov-Lawson 予想、また解析学における Kadison 予想などに関して著しい進展を与えた。一方弦理論において Witten は D-brane の位相的分類を行うために捩れ K 理論 (Twisted K-theory) という概念を導入した。[D-branes and K-theory, JHEP 9812, 019 (1998)]。K 理論は非可換幾何学の主要な研究手法のひとつであり、このことから素粒子論と非可換幾何学の密接な関係が再確認できる。その後 Carey, Freed, Mathai, Murray, Stevenson 等により、捩れ K 理論と Gerbe との関係性が明らかにされ、2000 年以降これらの研究を踏まえて、

Marcolli-Mathai [Commun. Math. Phys. 217 (2001)] 等による指数定理の一般化 (Twisted Index Theorem) が展開されている。

2. 研究の目的

これまで本申請者は、非可換幾何学の一般論と幾何的視点による具体的研究の間隙を埋めるために、以下のような研究を行ってきた：

1) 葉層円周束の Godbillon-Vey 類(葉層二次特性類)に対する具体的な指数公式の導出(夏目利一との共同研究)；2) 境界付き葉層多様体上での Atiyah-Patodi-Singer 指数定理の一般化 (Piazza との共同研究)；3) 葉層構造が導く III 型作用素環を弁別する二次不変量の構成。これらの研究成果をさらに推進するために、「非可換幾何学の枠組による指数定理の導出」および「葉層多様体上での指数定理の展開」の 2 点を研究の主眼とした。より詳しく言えば、a) 弦理論などの分野で急速に適用されつつある非可換幾何学の枠組に合致するように指数定理を拡張すること、すなわち「非可換化」を意識した指数定理の再構築；b) 非可換化された指数定理を用いて、従来の幾何手法では扱い難かった対象、とくに葉層多様体の葉空間や離散群作用を許す多様体の軌道空間(大抵の場合非ハウスドルフ空間となる)などの研究に資すること；を目指した。具体的目標は以下とおりである：

1) 葉層多様体・力学系・エルゴード的群作用が与えられたとき、ホロノミー亜群や変換亜群から作用素環・ C^* 環が定義される。またシンプレクティック幾何から派生する正準交換関係からも非可換環が定まる。葉層多様体の葉に沿うホロノミー不変な楕円型作用素の指数は、そのような環の K 群 (K 理論) の元として定義される。この K 群の元と巡回コホモロジー群とのペアリングの値を与える具体的な指数公式を導出する；

2) 境界付きのコンパクト有向多様体上の Atiyah-Patodi-Singer 指数定理を非可換幾何の枠組で定式化する。さらに境界付き葉層多様体を考えて、幾何的作用素のスペクトル不変量(エータ不変量, Ray-Singer torsion

等)が関与する二次指数定理を導出する (Godbillon-Vey 類 に関する Atiyah-Patodi-Singer 指数定理の一般化は Moriyoshi-Piazza [Geom.Funct.Anal., 2012] で確立されている);

3) Grebe や 捩れ K 理論の特性類である Dixmier-Douady 類は, 奇数次の族指数定理 (family index theorem) 指数公式の中に現れる. ここで Grebe のホロノミーを考えると Dixmier-Douady 類の二次特性類が生じる. とくに葉層円周束を考えると, 族指数定理と葉層二次特性類, とくに Godbillon-Vey 類との関連性を解明する.

3. 研究の方法

本研究組織は研究代表者 1 名と連携研究者 7 名および海外研究協力者 1 名 (P. Piazza, ローマ大学) の計 9 名で構成された. そして「指数定理の導出部」と「指数定理の展開部および具体例研究」に関わる 2 つのグループを構成し, 各々の連携研究者・研究協力者が担当分野を中心にして, 以下のような段階を経て研究を推進した.

予備段階として本研究課題の周辺分野における基礎知識の充足を図る. そのため本研究目的に関連する研究集会へ積極的に参加し, また個別に専門家との密接な研究連絡を行う.

研究の本段階, すなわち「非可換幾何学の枠組による指数定理の導出」と「葉層多様体上での指数定理の展開」においては, 多くの専門家を交えた包括的研究連絡あるいは密度の高い研究集会の開催を行う. このような機会を経て研究成果の最終的完成をはかり, 同時に応用面での妥当性を検証する.

本研究は, ほぼ以上の計画に基づいて実施された. まず初年度には本研究目的の周辺分野における基礎知識の充足を図った. そのため関連する主題の研究集会へ積極的に参加して専門家と討論を行った. 加えて次年度以降は, 多くの専門家との研究連絡を個別に行った. このために国内旅費・外国旅費・謝金等の経費を使用した. また非可換幾何学については, 専門家を交えた密接な研究連絡やレビューを行った. また必要となる文献を整備し,

指数的理の研究に資する環境を整備した. 資料整理にはノートパソコンとその関連機器を拡張した.

4. 研究成果

指数定理の一般化を目指し, 次いで展開部における基礎知識の充足を図ることという計画に沿って, 導出部担当グループと展開部担当部グループが定期的に研究討論を行い, 以下の成果を得た.

第一に, カントール集合やシェルピンスキーガasketなどのフラクタル集合上への指数定理の拡張が可能となった (夏目利一との共同研究). フラクタル集合は多様体とはかけ離れた構造をもつと考えられ, そのような集合上で, 非可換幾何の枠組を用いて指数定理を定式化したことは大きな成果といえる. Roe, Higson 等により, 非可換幾何学の枠組をもちいてコロナ空間上へ指数定理を拡張する研究が進展しているが, この結果は彼らの結果とも密接に関連している.

第二に, 非可換幾何の枠組を用いて Atiyah-Patodi-Singer 指数定理を境界付多様体の正規被覆空間上に拡張する研究 (A. Gorokhovsky and P. Piazza との共同研究) を完成させ, 一般の巡回コサイクルと K 群のペアリングを与える指数定理を証明した. 先の P. Piazza との共同研究においては, Atiyah-Patodi-Singer 定理を高次元の葉を持つ境界付葉層多様体に拡張し, 葉層の二次特性類である Godbillon-Vey 類が関与する指数定理を導いたが, 本研究では (Gromov の意味での) 双曲群のコホモロジー類から定まる巡回コサイクルを考えて, そのコホモロジー類が関与する指数定理を導いた. 第三に, Gerbe の特性類である Dixmier-Douady 類と葉層の特性類である Godbillon-Vey 類が, Cheeger-Chern-Simons 不変量を通じて結びつくことを明らかにした. Godbillon-Vey 類は葉層構造の不変量として円周の微分同相群の 2 次元コホモロジー類を与え, Dixmier-Douady 類は制限された一般線型群 GL_{res} を構造群とするファイバー束の 3 次元特性類を与える. 円周の微分同相群は自然に GL_{res} に含まれているにもかかわらず,

上記不変量の相互関係はこれまで明白ではなかった。本研究では Cheeger-Chern-Simons 不変量を手掛かりとして、この2つの不変量を結びつけることに成功した。そしてこの研究をさらに推進して、シンプレクティック微分同相群において重要な役割を果たす Calabi 不変量と、円周の微分同相群の普遍中心拡大との関連性を明確にした。とくに、Calabi 不変量を用いて普遍中心拡大を記述することに成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

H. Moriyoshi, A. Gorokhovskiy and P. Piazza, A note on the higher Atiyah-Patodi-Singer index theorem on Galois coverings, Journal of Noncommutative Geometry, 10(2016) 査読有

H. Moriyoshi, The Calabi invariant and central extensions of diffeomorphism groups, Geometry and Topology of Manifolds, The 10th Geometry Conference for the Friendship of China and Japan 2014, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 査読有 森吉 仁志, カントール集合上の指数定理, "Geometry and Analysis Fukuoka", 福岡微分幾何研究会報告集 (2016), 133--139, 査読無

[学会発表](計11件)

H. Moriyoshi, Secondary cyclic cocycle for Connes' Chern character on a Cantor set, China-Japan Conference on Noncommutative Geometry and K-Theory, Jilin University, Changchun, China, June 14, 2013

H. Moriyoshi, On a cyclic volume cocycle in Fractal Geometry, Further

development of Atiyah-Singer index theorem and K-theory, Kyoto University, Kyoto,

December 17, 2013

H. Moriyoshi, Quantum volume form on Cantor sets, 非可換幾何湯谷研究集会, 湯谷温泉「湯の風 HAZU」会議室, 愛知県新城市, 11月28日, 2013

H. Moriyoshi, A generalization of the Atiyah-Singer index theorem in Fractal Geometry, Topological phases in spintronics, AIMR, Tohoku University, Sendai, February 16, 2014

H. Moriyoshi, The Calabi invariant and extensions of diffeomorphism groups, 服部晶夫先生研究報告会 トポロジーの動向と展望, 東京大学大学院数理科学研究科 2014年6月27日

H. Moriyoshi, The Calabi invariant and extensions of diffeomorphism groups, Workshop Geometry and Dynamics of Foliations, Madrid, September 1-5, 2014

H. Moriyoshi, The Calabi invariant and group extensions of Diffeomorphisms, The 10th Geometry Conference for the Friendship between China and Japan, Fudan University, Shanghai, China, September 9, 2014. 第10回日中友好幾何学研究集会, 2014年9月6-12日上海復旦大学

H. Moriyoshi, The Godbillon-Vey index theorem in type III operator algebras, The Second China-Japan Conference on Noncommutative Geometry and K-Theory Naha, Okinawa, October 4, 2014

H. Moriyoshi, The Calabi invariant and group extensions of diffeomorphisms, Colloquium at Institute of Mathematics, VAST, Hanoi, Vietnam, April 2, 2015

森吉 仁志, カントール集合上の指数定理, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学, 福岡, 2015年11月1日

森吉 仁志, フラクタル集合上の指数定理, 香川セミナー, 香川大学, 高松 2016年2月6日

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/ja/people/faculty-05.html#moriyosi>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森吉 仁志 (MORIYOSHI HITOSHI)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号: 00239708

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

夏目 利一 (NATSUME TOSHIKAZU)
名古屋工業大学・工学系研究科・教授
研究者番号: 00125890

前田 吉昭 (MAEDA YOSHIAKI)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号: 40101076

三松 佳彦 (MITSUMATSU YOSHIHIKO)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号: 70190725

小野 薫 (ONO KAORU)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号: 20204232

宮崎 直哉 (MIYAZAKI NAOYA)

慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号: 50315826

高倉 樹 (TAKAKURA TATSURU)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号: 30268974

楯 辰哉 (TATE TETSUYA)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号: 00317299