

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 21 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400087

研究課題名(和文) ループ空間のホモトピー非可換性

研究課題名(英文) Homotopy noncommutativity of loop spaces

研究代表者

岸本 大祐 (Kishimoto, Daisuke)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：60402765

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：ループ空間のループ積のホモトピー的非可換性を、ゲージ群とポリヘドラルプロダクトの二つの対象を通して研究した。ゲージ群に関しては、 $\text{mod } p$  分解、非単連結な構造群をもつ主束のゲージ群のホモトピー型の分類、 $A_\infty$  型の分類を行った。特に、 $A_\infty$  型の分類において、LanneのT関手を用いた高次Whitehead積の解析という新しい手法を開発した。ポリヘドラルプロダクトに関しては、ファットウェッジフィルトレーションを導入し、その構造解析を通して、ポリヘドラルプロダクトのホモトピー型の記述を行った。その応用として、単体複体が組み合わせ代数におけるGolod性をもつ条件をトポロジー的に証明した。

研究成果の概要(英文)：Homotopy noncommutativity of the loop product of loop spaces was studied through gauge groups and polyhedral products. As for gauge groups, the  $\text{mod } p$  decomposition, the classification of homotopy types of gauge groups corresponding to principal bundles with non-simply connected structure groups, and the classification of  $A_\infty$  types were achieved. Particularly, in the classification of  $A_\infty$  types, a new method to detect higher order Whitehead products by using Lanne T-functor was developed. As for polyhedral products, the fat wedge filtration was introduced, and through analyzing its structure, the homotopy types of polyhedral products were described. As is application, a topological proof of Golodness of certain simplicial complexes, which has been studied in combinatorial commutative algebra, was given.

研究分野：代数トポロジー

キーワード：代数トポロジー ホモトピー論 ゲージ群 ポリヘドラルプロダクト

## 1. 研究開始当初の背景

ホモトピー論において、与えられた空間に積構造を付与し、その積構造を調べることにより、空間のホモトピー論的性質を導き出すのは、標準的な手法である。例えば、I.M. James は空間  $X$  に対してそのループサスペンション  $\Omega X$  が  $X$  で“生成”される自由位相モノイドであり、懸垂写像  $X \rightarrow \Omega X$  が生成元の包含写像であることを示した。これにより古典的なホモトピー論において最も重要な道具の一つである EHP 系列が生み出された。また、J. Hubbuck はホモトピー可換な連結有限ホップ空間はトーラスのホモトピー型をもつことを示し、その後のホップ空間の研究の口火を切った。これら二つの例において共通しているのは積の非可換性であり、与えられた代数系を調べるにあたってその非可換性を考えるのが重要であると同様に、ホモトピー論においても非可換性が重要な役割を果たしていることがわかる。しかしながら、ループ空間のホモトピー型や (コ) ホモロジーに関する研究はかなり進んでいる一方、その積構造の非可換性に関しては、上記の自由位相モノイドという普遍的に非可換な場合 (最も非可換な場合) や、ホモトピー可換な場合という、特別な場合にしか着目されてこなかったため、まだわからないことが多い。

## 2. 研究の目的

ループ空間の非可換性を次の 2 つの対象を通して研究することが目的である。

### (1) ゲージ群

ゲージ群とは、主束の自己同型のなす位相群のことであり、ゲージ理論におけるゲージ変換群のことである。定義より、その積構造は手足の構造群の積構造を反映しており、写像空間を通して、構造群の積構造を解析する、また、逆に、構造群の積構造で写像空間のホモトピー型をコントロールすることが可能になる。本研究の目的は、ゲージ群のホモトピー型と手足の構造群の積構造の相互関係を通して、構造群とゲージ群双方の積構造の非可換性について調べることである。特に、高次ホモトピー結合性を込めたホモトピー型を解析することにより、ふたつの位相群の積構造をより深く理解することに重点を置く。

### (2) ポリヘドラルプロダクト

ポリヘドラルプロダクトとは、抽象単体複体が定めるある部分空間配置の和集合である。その雛形が高次 Whitehead 積を導入する際に現れていることからわかるように、ポリヘドラルプロダクトはループ空間の非可換性

をはかる (高次) ホモトピー作用素と密接な関係を持つと考えられる。よって、ポリヘドラルプロダクトを通して、ループ空間の非可換性を組み合わせ的に捉えることで、調べることができる。Stanley-Reisner 環とポリヘドラルプロダクトは密接に関係するため、Stanley-Reisner 環の組み合わせ的性質からポリヘドラルプロダクトのホモトピー型の性質を推測し、ループ空間の非可換性へとつなげる。

## 3. 研究の方法

### (1) ゲージ群

ゲージ群の分類空間はある写像空間のホモトピー型をもち、ゲージ群はその写像空間お評価ファイブレーションの連結写像のホモトピーファイバーのホモトピー型をもつ。さらに、手足の程空間がサスペンション空間であるとき、この連結写像は、主束の構造群の交換子写像である Samelson 積で与えられる。この記述はさらに一般化され、一般の程空間に対しても、構造群の射影空間を用いることで、連結写像は記述され、これにより、自然に、構造群の高次ホモトピー可換性が現れる。ゲージ群とこの Samelson 積の高次化との関係を利用して、構造群の非可換性を調べる。程空間がサスペンション空間のときは具体的に Samelson 積を計算することにより、構造群の非可換性と、ゲージ群のホモトピー型の分類とを対比させる。

### (2) ポリヘドラルプロダクト

ポリヘドラルプロダクトはサスペンションすることで分解することが知られており、この分解を出発点として、ポリヘドラルプロダクトのホモトピー論は発展してきた。具体的には、この分解をサスペンションせずに行える単体複体の族を特定する研究がなされてきた。これまでの研究の手法は、すべてアドホックなものであり、ポリヘドラルプロダクトの一般的な性質を理解するには至っていなかった。そこで、サスペンション分解を与えるポリヘドラルプロダクト構造を発見し、その解析を通して、ポリヘドラルプロダクトのホモトピー型を研究する。このホモトピー型の記述を通して、組み合わせ論と直接結びつくことで、分解のサスペンションをはずすことへとつながり、より広いクラスの単体複体でサスペンションを外すことが可能になる。また、上記の構造と Whitehead 積とその一般化との関係を調べることで、ループホモロジーの決定につながる。

## 4. 研究成果

### (1) ゲージ群

ゲージ群の mod  $p$  分解と、その応用として、ホモトピー型の数え上げを行った。ゲージ群の分類空間のホモトピー型の無限性が予想されていたが、これを Lanne の  $T$  関手を用いて、コホモロジーの非安定代数構造を解析することで証明した。Lanne の  $T$  関手は高次 Whitehead 積を解析するために用いられたが、このような使われ方はこれまでになく、さらなる応用へとつながることが期待される。非単連結なリー群を構造群にもつ主束のゲージ群のホモトピー型の分類も行った。

## (2) ポリヘドラルプロダクト

shifted 複体のポリヘドラルプロダクトの分解を与えた。その後、ポリヘドラルプロダクトにファットウェッジフィルトレーションを導入し、その構造を解析することで、Bahri-Bendersky-Cohen-Gitler のホモトピー分解(上記のサスペンション分解)の理解を深めた。さらに、その応用として、これまで得られた分解を統一し、さらに双対 sequentially Cohen-Macaulay 複体まで、ポリヘドラルプロダクトが分解する単体複体のクラスを広げた。また、ファットウェッジフィルとレーションを用いて、局面の三角形分割である単体複体からつくられるポリヘドラルプロダクトの性質を特徴づけた。その後、この特徴づけは Katthan による高次元多様体の三角形分割の研究へ応用された。shifted 複体の場合は Whitehead 積の一般化と考えられてきたポリヘドラルプロダクトの間の写像が、実は、(高次) Whitehead 積の合成であることを示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 15 件)

S. Hasui, D. Kishimoto, A. Kono, and T. Sato, The homotopy types of  $PU(3)$  and  $PSp(2)$ -gauge groups, *Algebr. Geom. Topol.* 掲載決定

S. Hasui, D. Kishimoto, and T. Sato,  $p$ -local stable splitting of quasitoric manifolds, *Osaka J. Math.* 掲載決定

K. Iriye and D. Kishimoto, Decompositions of suspensions of spaces involving polyhedral products, *Algebr. Geom. Topol.* 16 (2016), 825-841.

D. Kishimoto and M. Tsutaya, Infiniteness of  $A$ -types of gauge groups, *J. Topol.* 9 (2016), no. 1, 181-191.

S. Hasui, D. Kishimoto, and A. Ohsita, Samelson products in  $p$ -regular exceptional Lie groups, *Topology Appl.* 178 (2014), no. 1, 17-29.

K. Iriye and D. Kishimoto, Postnikov towers with fibers generalized Eilenberg-MacLane spaces, *Homology Homotopy Appl.* 16 (2014), no. 1, 139-157.

D. Kishimoto, A. Kono, and A. Ohsita, KO-theory of complex partial flag manifolds, *Quart. J. Math.* 65 (2014), no. 2, 327-338.

D. Kishimoto, A. Kono, and S. Theriault, Refined gauge group decompositions, *Kyoto J. Math.* 54 (2014), no. 3, 679-691.

D. Kishimoto, A. Kono, and M. Tsutaya, On localized unstable  $K1$ -groups and applications to self-homotopy groups, *Canad. Math. Bull.* 57 (2014), no. 2, 344-356.

D. Kishimoto, A. Kono, and M. Tsutaya, On  $p$ -local homotopy types of gauge groups, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh: Sect. A* 144 (2014), no. 1, 149-160.

D. Kishimoto and A. Ohsita, KO-theory of exceptional flag manifolds, *Kyoto J. Math.* 53 (2013), no. 3, 673-692.

D. Kishimoto, A. Kono, and S. Theriault, Homotopy commutativity in  $p$ -localized gauge groups, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh: Sect. A* 143 (2013), 851-870.

K. Iriye and D. Kishimoto, Decompositions of polyhedral products for shifted complexes, *Adv. Math.* 245 (2013), 716-736.

K. Iriye and D. Kishimoto, Hom complexes and hypergraph colorings, *Topology Appl.* 160 (2013), no. 12, 1333-1344.

D. Kishimoto, A. Kono, and M. Tsutaya, Mod  $p$  decompositions of gauge groups, *Algebr. Geom. Topol.* 13 (2013), no. 3, 1757-1778.

[学会発表](計 0 件)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

岸本大祐 (KISHIMOTO Daisuke)  
京都大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：6 0 4 0 2 7 6 5

### (2)研究分担者

なし

### (3)連携研究者

河野明 (KONO Akira)  
同志社大学・理工学部・教授  
研究者番号：0 0 0 9 3 2 3 7

入江幸右衛門 (IRIYE Kouyemon)  
大阪府立大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：4 0 1 5 1 6 9 1

岩瀬則夫 (IWASE Norio)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号：6 0 2 1 3 2 8 7

栗林勝彦 (KURIBAYASHI Katsuhiko)  
信州大学・理学部・教授  
研究者番号：4 0 2 4 9 7 5 1

玉木大 (TAMAKI Dai)  
信州大学・理学部・教授  
研究者番号：1 0 2 5 2 0 5 8

佃修一 (TSUKUDA Shuichi)  
琉球大学・理学部・准教授  
研究者番号：5 0 3 0 5 1 8 2