

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400094

研究課題名(和文) 有理ホモロジー球面の量子不変量から得られる級数と関数の性質とその拡張の研究

研究課題名(英文) Study on properties and an extension of series and functions obtained from the quantum invariant of rational homology 3-spheres

研究代表者

高田 敏恵 (TAKATA, Toshie)

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：40253398

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：2橋結び目の $N$  colored Jones 多項式の $N$ が無限大における漸近挙動について、主要項の次の項にtwisted Reidemeister torsion があらわれることを示唆する結果を得た。また8の字結び目の手術から得られる双曲3次元多様体の量子不変量の漸近挙動にReidemeister torsionがあらわれることを証明した。以上は大槻氏との共同研究である。また、結び目の $n$ -colored Jones 多項式の $n$ が十分大きいときのslope予想について、茂手木氏との共同研究により、双曲体積が0である結び目については、slope予想が正しいことを示した。

研究成果の概要(英文)：We obtained a result that the second coefficient is presented by a constant multiple of the square root of the twisted Reidemeister torsion as  $N$  goes to the infinity in the asymptotic expansion of  $N$  colored Jones polynomial of a 2-bridge knots and  $SU(2)$  invariant of some hyperbolic 3-manifolds obtained by surgery along the figure-eight knot, by joint works with T. Ohtsuki.

We verified the slope conjecture for graph knots, i.e. knots whose Gromov volume vanish, by a joint work with K. Motegi.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：結び目・3次元多様体の量子不変量

### 1. 研究開始当初の背景

半単純リー環に付随した閉3次元多様体の量子不変量が構成され、大槻によって、量子不変量の数論的漸近開により、大槻不変量に付随した摂動的(不変量)が構成され、それは  $Le$  によって他の単純リー環に付随する摂動的(不変量)に一般化された。有理ホモロジー球面は3次元球面と同じ有理係数ホモロジー群をもつ閉3次元多様体である。

以下、有理ホモロジー球面  $M$  を考える。また、 $Le$ 、村上順、大槻によって定義された摂動的量子不変量を統一する  $M$  の LMO 不変量は、Jacobi 図とよばれる3価グラフによって有理数上張られる空間に値をもつ。(係数が有理数) Jacobi 図の頂点の個数の半分を Jacobi 図の次数という。重み系と呼ばれる写像を LMO 不変量に適用することによって摂動的(不変量)が得られることが知られている。 $G$  を単連結コンパクトリー群  $SU(N)$ ,  $SO(N)$ ,  $Sp(N)$  のいずれかとし、 $g$  を  $G$  のリー環とする。 $g$  に付随した重み系を LMO 不変量に適用することによって  $M$  の  $G$  free energy が得られる。 $G$  free energy は、 $N$  の多項式を係数とする  $h$  のべき級数である。

S. Garoufalidis, T.T.Q. Le, M. Marino らは、リー群  $SU(N)$ 、任意の3次元多様体に対して、摂動的(不変量)の  $h$  の冪の係数は ( $g$  に依存した)  $\tau=Nh$  の関数であるが、 $\tau=0$  の  $g$  に依存しない近傍で解析的であることを示し、レンズ空間の  $SU(N)$  free energy の明確な公式を与えた。S. Garoufalidis と M. Marino は、リー群が  $SO(N)$ ,  $Sp(N)$  のとき、 $G$  free energy も同様の解析的性質をもつことを予想された。申請者は、レンズ空間の  $SO(N)$ ,  $Sp(N)$  free energy の明確な公式を与え、レンズ空間に対して、S. Garoufalidis と M. Marino の上記予想が正しいことを示した。また、最近の研究において、ザイフェルト多様体の  $SU(N)$  free energy の種数0の項(planar limit)を与える公式を発見した。その公式は、generalized Catalan numbers を用いて書かれる。generalized Catalan numbers は、そのラプラス変換が Eynard-Orantin recursion をみたすなどいい性質をもつことが知られている。一方、Koshkin は、Chern-Simons 不変量(量子不変量)と Gromov-Witten 不変量(GW 不変量と書く)を関連付ける予想(Large N duality)の解決の手段として、Chern-Simons 不変量、GW 不変量のある正則関数の異なる特徴づけと解釈することを提唱した。3次元球面について、その正則関数は quantum Barnes function であることを示した。

### 2. 研究の目的

単純コンパクトリー群に付随した3次元多様体の摂動的量子不変量が定義されたが、一般の3次元多様体の摂動的量子不変量を具体的に計算することは難しく、性質には、未知の部分が多い。本研究の目的は、リー群が、

$SU(N)$ ,  $SO(N)$ ,  $Sp(N)$  のとき、有理ホモロジー球面の摂動的量子不変量の  $N$  に関する展開である3次元多様体の自由エネルギー(free energy)に注目し、その展開にあらわれる級数の代数的な性質、幾何学的意味また他の不変量との関係を解明することである。更にある点で量子不変量を与える、正則性、保型性のようないい性質を持つ不変量への拡張を目指すことである。村瀬らによる結果とも比較しながら、これまで得られた結果をもとに一般の3次元多様体の  $M$  の  $G$  free energy の解析的性質、他の不変量との関係、幾何学的意味の解明をめざす。

Koshkin が見つけた関数はある変換のもとでいい振る舞いをする。この手法を利用することによって、他の多様体、特に  $G=SU(2)$  場合にのみ示されているザイフェルト多様体の量子不変量の保型性が  $G=SU(N)$  のときも成立するか調べる。また、 $SO(N)$ ,  $Sp(N)$  の場合への拡張も考える。

### 3. 研究の方法

- (1) 結び目の Kontsevich 不変量、colored Jones 多項式のループ展開がえられる仕組みをよりよく理解し、 $G$  free energy における Alexander 多項式に対応するものがあるのか吟味する。その際、大槻氏や他の研究者によってえられているあるクラスの結び目の2-ループ多項式の公式と、それらの結び目の手術によってえられる3次元多様体の  $G$  free energy において対応する  $g=1$  の部分との比較研究を行う。
- (2) Bar-Natan と Lawrence によって与えられたザイフェルトホモロジー球面の LMO 不変量の公式は、自明な結び目の Kontsevich 不変量 (wheel と呼ばれる1つのループに偶数本の辺がついている open Jacobi 図の無限和)のいくつかの積の形が含まれている。現在の研究課題において、いくつかの wheel の積に半単純リー環  $g$  に付随する weight system を適応することにより、free energy の種数  $g=0$  の項に関する公式を得た。また、得られたその公式は、村瀬らによって研究されている generalized Catalan numbers によってあらわされ、そこにおける結果は、より高い種数  $g$  の項についての公式の導出に利用できると思われる。さらに、その生成関数と Eynard-Orantin の topological recursion との関連、および分配関数に関する結果とも比較し、free energy の性質を調べる。

#### 4. 研究成果

上記研究方法の実行において、結び目、3次元多様体の漸近挙動、および、結び目の量子不変量のひとつである  $n$ -colored Jones 多項式の  $n$  が十分大きいときのそれらの最大次数、最小次数について予想に関していくつかの結果を得た。

- (1) 前研究課題において得られていたザイフェルト多様体に対する  $SU(N)$  free energy の公式は、generalized Catalan number によって書かれているが、更に明確な公式の導出のために、free energy の変数  $\tau$  の次数が低い部分について、具体的な計算を実行した。また、村瀬氏によって得られた generalized Catalan number から得られる分配関数と、 $SU(N)$  摂動的な不変量との具体的な類似点を見つけ、free energy の変数  $\tau$  の係数にあたる部分が generalized Catalan number の Laplace 変換に対応しているのではないかと考えた。その Laplace 変換は、ある微分方程式をみたし、それは分配関数がみたす微分方程式の導出のカギとなっている。まず、明確な free energy の公式が得られているレンズ空間についてその微分のふるまいを考察した。更に Vogel によって定義された Lie algebra を統一すると考えられる Universal Lie algebra が定義され、それは3つのパラメータをもつ。Mkrtchyan は、3次元球面の量子不変量とその3つのパラメータで表せることを示した。その3次元球面に対する結果のレンズ空間への拡張を考察した。
- (2) Henning invariant としての量子不変量の観点から、 $SU(N)$  摂動的な不変量をとるために、結び目の普遍  $SU(N)$  不変量について研究した。その研究の中で、量子群の一つの一般化である2変数量子群の存在に気づき、そこから2変数の結び目の不変量、更に3次元多様体の不変量の構成ができると予想されており、 $R$ -matrix の構成、ribbon element の構成などを行った結果、これまで知られている量子不変量と同じものが得られることがわかった。また、Henning 不変量としての Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量の研究を行った。Henning 不変量としての表示は、量子群の中心の元を求めることに帰着される。Feigin, Gainutdinov, Semikhatov, Tipunin によって与えられた  $sl_2$  に対応する量子群の center の特別な基底に関して、WRT 不変量を与える中心の元の表示を与えた。
- (3) 結び目の colored Jones 多項式のループ展開 (摂動的な不変量) が得られる仕組

みの研究に関連して、大槻氏との共同研究により、2橋結び目の colored Jones 多項式の、 $N$  が無限大における漸近挙動について、主要項の次の項に twisted Reidemeister torsion があらわれることを示唆する結果を得た。7交点までは、大槻氏による colored Jones 多項式の漸近展開の結果とあわせると twisted Reidemeister torsion があらわれることが示される。

- (4) 結び目の量子不変量  $n$ -colored Jones 多項式の  $n$  が十分大きいとき、最大次数と最小次数と結び目の boundary slope の関係をあたえる slope conjecture に関して、茂手木公彦氏との共同研究によって、いくつかの結果を得た。slope conjecture が正しい2つの結び目から得られる合成結び目に対する slope conjecture も正しいこと、ある条件のもとで、slope conjecture が正しい結び目の cable 結び目についても、slope conjecture が正しいことを示した。二つの結果を合わせることで、双曲体積が0である結び目については、slope conjecture が正しいことがわかった。また、無限個の非交代双曲結び目を含む、周期結び目のあるクラスについて、 $n$ -colored Jones polynomial の公式を与え、それをもとにその minimum degree, maximum degree の計算を行った。具体的には、positive 3-braids のあるクラスの closure として得られる結び目について、degree の計算を行った。その結果から、そのクラスの結び目について slope conjecture が成り立つことがわかった。更に、結び目  $K$  の Whitehead double の  $n$ -colored Jones 多項式の degree の計算を行い、 $K$  の  $n$ -colored Jones polynomial の degree との関係を見出した。
- (5) 8の字結び目の surgery から得られる双曲3次元多様体の Chen による parameter を用いた量子  $sl_2$  不変量の漸近挙動に Reidemeister torsion があらわれることを大槻氏との共同研究により証明した。また、Seifert 多様体のあるクラスの量子  $sl_2$  不変量の漸近挙動に Reidemeister torsion があらわれることを示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

茂手木 公彦、高田 敏恵、The slope conjecture for graph knots. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 査読有、162 (2017), no.3, 383-392.  
DOI:10.1017/S0305004116000566

大槻 知忠、高田 敏恵、On the Kashaev invariant and the twisted Reidemeister torsion of two-bridge knots, Geometry and Topology 19 (2015), 853--952.  
DOI:10.2140/gt.2015.19.853

[学会発表](計10件)

高田 敏恵、The slope conjecture and periodic construction, Low dimensional topology and number theory IX、2017年3月15日、九州大学産学官連携イノベーションプラザ

高田 敏恵、The slope conjecture and periodic construction、2016年度東北結び目セミナー、2016年10月15日、東北大学

高田 敏恵、On the asymptotic expansions of the Kashaev invariant of some hyperbolic knots with 8 crossings、Workshop on Volume Conjecture and Quantum Topology、2016年9月6日、早稲田大学

高田 敏恵、The slope conjecture for graph knots、拡大KOOKセミナー2016、2016年8月23日、大阪電気通信大学

高田 敏恵、The slope conjecture for graph knots、拡大KOOKセミナー2015、2015年8月19日、神戸大学

高田 敏恵、On the Kashaev invariant and the twisted Reidemeister torsion of two-bridge knots、Intelligence of Low-dimensional Topology、2015年5月22日、京都大学 数理解析研究所

高田 敏恵、On the slope conjecture for cables of knots、2014年度東北結び目セミナー、2014年10月19日、秋田市カレッジプラザ

高田 敏恵、On the Kashaev invariant and the twisted Reidemeister torsion of two-bridge knots、Quantum Topology and Physics 2014 Fukuoka、2014年9月18日、九州大学西新プラザ

高田 敏恵、On the Kashaev invariant and the twisted Reidemeister torsion of two-bridge knots、曲面の写像類群に関する幾何と代数、2013年12月20日、共済組合箱根宿泊所強羅星雲荘

高田 敏恵、結び目群の表現と colored Jones polynomial、群と幾何学の展望、2013年10月12日、東京大学玉原国際セミナーハウス

## 6. 研究組織

(1)研究代表者

高田 敏恵 (TAKATA, Toshie )  
九州大学・数理学研究院・准教授  
研究者番号：40253398