様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２８　年　　６　月　　７　日現在

機関番号：　３２６７０
研究種目：　基盤研究(C)　(一般)
研究期間：　2013～2015
課題番号：　２５４００１００

研究課題名（和文）自明結び目のアーク表示をほどくために必要な基本変形の回数の上界

研究課題名（英文）An upper bound for the number of elementary moves needed for unknotting an arc-presentation of the trivial knot

研究代表者
林　忠一郎（Hayashi, Chuichiro）

日本女子大学・理学部・教授

研究者番号：２０２８１３２１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：安藤龍郎、西川友紀、林美和と以下の共同研究を行った。平面上のアイソトピーによって、交差点をn個持つ結び目の射影図を縦線が2n+2本以下のグリッド表示に変形できることや、結び目の射影図のザイフェルト・サークルたちを縦線２本と横線２本の四角形に、交差点の代わりのアークたちが縦線１本に変形できることを示した。n本の縦線を持つグリッド表示の一番上と一番下の横線の間のエクスチェンジ変形やマージ変形が何回以下のライデマイスター変形で実現できるかnの式で評価した。自明結び目のアーク表示は何回以下のエクスチェンジ変形をすればマージ変形できるようになるかアークの本数が小さい場合にコンピューターで調べた。

研究成果の概要（英文）：I performed studies below together with T. Ando, Y. Nishikawa and M. Hayashi. We showed that any knot diagram with n crossings can be deformed by an adequate ambient isotopy of the plane into a grid diagram with 2n+2 or less vertical lines, and that the system of Seifert circles of a knot diagram can be deformed by an ambient isotopy into a disjoint union of squares composed of 2 vertical lines and 2 horizontal lines, and simultaneously, arcs substituting the crossings into vertical lines. We showed that an exchange move or merge move between the top and the bottom horizontal edges of a grid diagram with n vertical edges can be realized by a sequence of no more than 3n 4n-4 Reidemeister moves. We calculated by computers that how many exchange moves are sufficient for deforming an arc-presentation of the trivial knot so that it admits a merge move when the number of arcs are small.

研究分野：　低次元位相幾何学

キーワード：　結び目　自明結び目　アーク表示　クロムウェル変形　グリッド表示

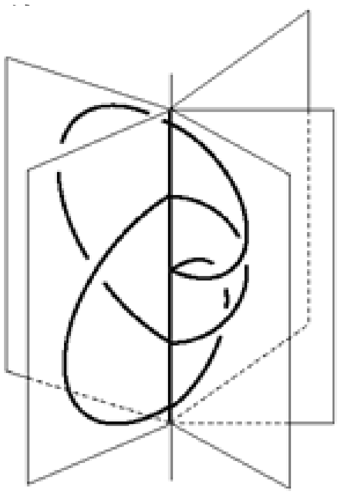
１．研究開始当初の背景

３次元空間R^3に無限遠点∞を付け加えると３次元球面$S^3 = R^3 \cup \infty$になる。R^3のどちらの方向に果てしなく進んでも、同一の無限遠点∞に到達するとする。結び目は３次元球面内の輪である。自己交差させることなく連続的に動かしても同じ結び目とみなす。うまく動かすと球面上に交差点無しの状態で乗せられる結び目を自明結び目と呼ぶ。ほどける結び目のことである。

与えられた結び目が自明結び目を表すか否か判定する有限アルゴリズムは既に幾つか構成されている。ハーケンはノーマル曲面を用いる方法を、バーマンとハーシュは閉組み紐を用いる方法を、ハスとラガリアスはライデマイスター変形を用いる方法を、そして、ディニコフはアーク表示を用いる方法を構築した。

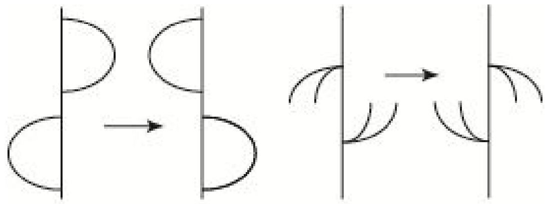
ノーマル曲面、閉組み紐、ライデマイスター変形による方法は有限ではあるがかなり広い範囲をしらみ潰しに調べる計算が必要になり、実用的でないと思われる。

実用的かもしれないと期待されるのが アーク表示による方法である。この方法はアーク表示に用いるアークの本数を増やさない変形のみで自明結び目を解くことができる。どの２以上の自然数ｎに対しても、アークがｎ本のアーク表示は有限個しかないので、この結果は結び目がほどけるか否か判定する有限アルゴリズムを与える。また、アーク表示はコンピューターによって扱い易い表示

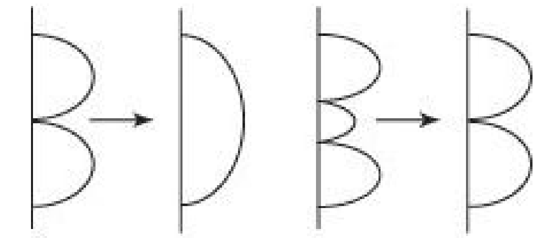


アーク表示

アーク表示を詳しく述べる。３次元空間R^3に xyz 座標を入れる。z 軸を境界とする半平面たちでR^3は埋め尽くされ、この構造をR^3 の z 軸の周りの open-book 分解と呼ぶ。各半平面を page と呼ぶ。３次元球面S^3の open-book 分解はR^3 の open-book 分解に無限遠点∞を付け加えて得られる。z 軸は∞が付け加わって輪となる。輪となっても open-book 分解の軸と呼ぶ。page をなす半平面にも∞が付け加わって円盤となる。結び目ＫがS^3の open-book 分解に関してアーク表示されているとは、Ｋが有限枚の page の和集合に収まっており、各 page とは「軸の輪に両端点を持つただ１本のアーク（曲線分）」で交わっていることとする。



アーク・エクスチェンジ　　頂点・エクスチェンジ



アーク・マージ　　頂点・マージ

アーク表示の基本変形を説明する。アーク・エクスチェンジは端点が軸上で入り組まない２本のアークが隣同士の羽根にある場合、羽根とアークともども順序を入れ替える。頂点・エクスチェンジは或る条件下で２頂点の位置を入れ替える。アーク・マージ変形は隣の羽根に入った２つのアークたちが１つの端点を共有するとき、２つのアークを繋げて１つにし、１つの羽根に収める。頂点・マージは軸上で隣り合う２頂点を結ぶアークがあるとき、そのアークを削除して１つの頂点に融合する。ディヴァイドはマージの逆である。ディヴァイドのみアークの本数を増やす。これらの変形はクロムウェルが導入したので、クロムウェル変形と呼ぶことにする。２つのアーク表示が同じ結び目を表すとき、それらはクロムウェル変形で移り合うということがクロムウェルの論文に書かれている。

ディニコフの定理は、自明結び目のどんなアーク表示もエクスチェンジ変形とマージ変形のみを用いてアーク２本のアーク表示に変形できるというものである。アーク２本のアーク表示は１つしか無く、自明結び目を表す。エクスチェンジ変形はアークの本数を変えず、マージ変形はアークの本数を減らすので、一連の変形はどの段階でもアークの本数を増やさない。アークの本数を増やすディヴァイド変形を用いていないからである。(I.A.Dynnikov “Recognition algorithm in knot theory ” Russian Math. Surveys 58(2003)1093-1139　参照。)

研究代表者は自明結び目のアーク表示をマージ変形するまでに必要なエクスチェン

ジ変形の最小回数の下界を研究し、 アークの本数ｎの１次式回以上必要な具体例の無限列を得た。また、アークが 7 本で 1 回, 8 本で 2 回, 9 本で 4 回, 10 本で 7 回, 11 本で 11 回必要な具体例をコンピューターで見つけた。

ヘンリヒとカウフマンはディニコフの定理を応用して、結び目のモース型の射影図をライデマイスター変形でほどく場合に、必要な変形回数の最小値を上から評価する論文をアーカイヴに投稿した(A. Henrich and L. Kauffman “Unknotting unknots” arXiv:1006.4176v1)。その評価は $\Sigma_{k=1}^{M}$ (k/2)[(k－1)！]^{2} (M－2)であり、ここで M は極大点数の２倍と交差点数の和である。ただし、私見では証明に間違いが１つある。彼らはアーク表示とほぼ同等の概念であるグリッド表示を用いた。グリッド表示とは、３次元空間Ｒ^{3}内の平面上の結び目の射影図（交差点の上下の指定付き）で、縦線と横線のみから成り、交差点では必ず縦線が横線の上を通るものである。グリッド表示の縦線がアーク表示のアーク、グリッド表示の横線がアーク表示の頂点（結び目と軸との交わり）に対応する。（なお、３次元空間に無限遠点∞を付け加えると３次元球面になり、平面も∞が付け加わって球面になる。）

彼らの議論では、モース型の結び目の射影図を平面のアイソトピー（平面上で連続的に動かすこと）によって縦線（横線と本数が一致する）が何本のグリッド表示に直せるか考える際に、極大点の数を用いる。

次に、アーク表示のクロムウェル変形に対応する変形をグリッド表示で考えたもの（これらもエクスチェンジ変形、マージ変形などと呼ぶことにする）をライデマイスター変形で実現すると、多くても何回の変形で済むかという問題を考える。一番上と一番下の横線（もしくは一番左と一番右の縦線）にまつわるエクスチェンジ変形やマージ変形（外側のエクスチェンジ変形、マージ変形と呼ぶことにする）を考えていないというところがこの論文の間違いであると考える。なお、研究代表者はかつての修士の学生の西川友紀とともに、外側のエクスチェンジ変形を行わないとほどけない自明結び目のグリッド表示の具体例を見つけている。

そして、自明結び目を表すアーク表示は多くとも何回のエクスチェンジ変形とマージ変形をすることによってアーク２本の表示に直せるかという問題を解いて、上記の評価式が得られる。

２．研究の目的

ヘンリヒとカウフマンの論文の方針でのライデマイスター変形の回数の上からの評価を改良することを目的とする。改良には２つの意味がある。

１つ目は極大点の数を評価式から取り除き、交差点数だけで評価するということである。結び目の射影図をモース型に直して、極大点が幾つになるかその都度考えるのは手間が掛かる。

２つ目は交差点数のなるべく小さい式にすることである。

１つ目の目的のために、交差点がｎ個の結び目の射影図を平面のアイソトピーによって縦線（横線と数は等しい）が何本以下のグリッド表示に直せるか、交差点の数ｎだけの式で評価するという問題を考える。これを課題１とする。

２つ目の目的のためには２つのことをする必要がある。

まず、外側のエクスチェンジ変形と外側のマージ変形が何回以下のライデマイスター変形で実現できるかという問題を解く。これを課題２とする。

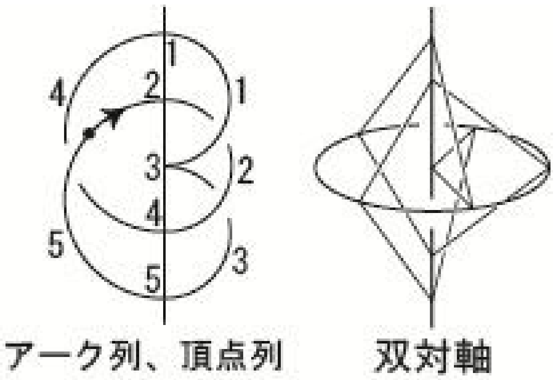
次に、自明結び目のアーク表示に於いて、マージするまでに何回以下のエクスチェンジ変形で済むか、その上界をアークの本数の式で、より小さく評価することが求められる。これを課題３とする。

３．研究の方法

まず課題１であるが、結び目の射影図から得られるザイフェルト・サークルたちと交差点に対応するアークたちをなるべく少ない縦線と横線で実現することを考える。ザイフェルト・サークルとは、結び目に結び目の輪を一周する向きを任意に決めておいて、結び目の図の全ての交差点にスムージング操作をして得られる互いに交わらない向き付きの輪たちのことである。スムージングとは交差点のところで向きが繋がるように紐を繋ぎかえる操作のことである。スムージングによってその交差点は消えるが、そこに交差点があったことを記録しておくために、繋ぎ替えの際に用いた新しい線を繋ぐ線分（アーク）を描いておく。このザイフェルト・サークルたちやアークたちを平面のアイソトピーによって変形することによって、多くとも何本の縦線や横線で実現できるかを元々の結び目の射影図の交差点の数ｎの式によって評価する。

次に課題２であるが、グリッド表示に於ける外側のエクスチェンジ変形や外側のマージ変形はジャンプ変形を１回もしくは２回行って実現できる。ジャンプ変形とは交差点の上ばかり（もしくは下ばかり）通っている紐を端点を固定してずらす操作であり、ずらした先の紐も交差点の上ばかり（もしくは下ばかり）を通り、その位置は元々の位置と端点以外では交わらないとする。ジャンプ変形が何回以下のライデマイスター変形で実現できるかは、研究代表者の論文(C.Hayashi

"The number of Reidemeister moves for splitting a link." Mathematatische Annalen 332 (2005), 239--252.）の中で既に研究されている。そこでは、ジャンプ変形によって飛び越される交差点の数の式でライデマイスター変形の回数が上から評価されている。さらに、縦線がｎ本のグリッド表示が最大何個の交差点を持ち得るかをｎの式で求める。ジ



ャンプ変形によって飛び越される交差点の数はこの数以下であるから、これらの結果を繋ぎ合わせて課題２の目的の評価式が得られる。

最後に課題３であるが、自明結び目のアーク表示をマージするまでに必要なエクスチェンジの最小回数の上界を証明付きで与えたのは、ヘンリヒとカウフマンの論文だけであり、その評価はｎをアークの本数とすると き$\{n((n-1)!)^2\}/2$ 回以下というものである。しかし、この数はアークがｎ本のアーク表示の総数であり、アーク表示の定義からすぐに分かる大雑把な評価である。

結び目のアーク表示はアーク列と頂点列の２つのサイクリックな数列の組で表される。アークがｎ本の表示の場合、頂点（軸と結び目の交点）たちに上から順に１からｎまで番号を振る。page とその中のアークたちに軸の周りに現れる順に１からｎまで番号を付ける。どこを１としても良い。結び目に向きを任意に付ける。アークを１本任意に選び、その上に１点を始点として取り、固定する。そこから結び目に沿って向きの方向に一周し、現れた順にアークの番号を並べてアーク列を得る。同様に現れた順に頂点の番号を並べて頂点列を得る。例えば上図の場合、アーク列は5,2,4,1,3 頂点列は 2,4,1,3,5 である。結び目の向きの付け方と、始点の取り方によって異なるアーク列や頂点列が得られるから、１つのアーク列を表すアーク列と頂点列の組は１通りではない。しかし、上記のｎ本のアークからなるアーク表示全ての総数と比べると、２つの数列を用いるのはそれほど効率の悪い方法ではない。

サイクリックな数列であるアーク列(頂点列)において続き番号(ｉと i+1 (mod n))が並んでいるとき、我々はその数列の表すアーク表示に直ちにアーク・マージ操作(頂点・マージ操作)を適用して、アークの本数を減らすことができる。また、ｉ 番のアーク(頂点)と i+1 番のアーク(頂点)をエクスチェンジすると、アーク列(頂点列)の番号ｉと番号 i+1 の位置が入れ替わるが、頂点列(アーク列)は変化しない。

実はアークと頂点は双対であることが知られている。軸はｚ軸∪∞だが、双対軸をｚ＝０かつ$x^2+y^2=1$の輪として取る。これは各羽根と１点ずつで交わる。各羽根上でアークが双対軸との交点を通るように動かすと、アーク表示の結び目は軸上の頂点と双対軸上の頂点を交互に結ぶ折れ線となる。軸たちを入れ替える双対性により、アークと頂点の区別が無くなる。

アーク列と頂点列を一般化して、１からｎの番号１つずつ計ｎ個をサイクリックに並べた数列を考える。続き番号が並ばない数列全ての集合Ｗを考え、続き番号の位置を入れ替える操作有限回で移り合う２つの数列は同値であるとする。こうして、数列たちの集合Ｗは幾つかの同値類に分かれる。マージできないうちのエクスチェンジ変形では、アーク列や頂点列は同じ同値類の中に納まったままである。どちらかの列が同値類からはずれる変形が起こるとマージできるアーク表示が得られる。このような同値類の要素の数の最大値を e(n) と書くことにすると、マージするまでに必要なエクスチェンジ変形の回数は $e(n)^2$ 以下であることが分かる。そこで、e(n)をｎの式で上から評価することにする。

４．研究成果

課題１に関する成果は、当時、立教大学の修士課程の学生であった安藤龍郎氏と、学術研究員として日本女子大学に在籍している林美和と研究代表者の林忠一郎との共同研究によって得られた。ザイフェルト・サークルと交差点の代わりのアークたちは平面のアイソトピーによってとても綺麗に直すことができる。全てのザイフェルト・サークルたちは縦線２本、横線２本の四角形に変形できる。さらに、交差点の代わりのアークたちの各々は縦線１本のみに変形できる。驚いたことにこれら全てが同時に実現できるのである。このことの系として、交差点がｎ個の結び目の射影図は平面のアイソトピーによって縦線が n+2s 個以下のグリッド表示に変形できることが分かった。ここでｓはザイフェルト・サークルのサークルの個数であり、結び目の射影図から簡単に求めることができるので、これはこれで良い評価である。ｓをｎの式で評価することもできるが、一般論としては期待したほど良い評価が得られない。

そこで、方針を変更した。結び目の射影図からザイフェルト・サークルを得る際にスムージング操作をするのだった。これは結び目

の向きを意識したものであった。しかし、結び目の向きを気にするよりも操作後に得られる輪の数を減らした方が良い評価が得られる場合も多いことが分かった。実際、操作後の輪の数が１になるように（向きを気にしない）スムージングもどきの操作をすることができ、それを用いて交差点がｎ個の結び目の射影図は縦線が 2n+2 本以下のグリッド表示に平面のアイソトピーによって変形できることが示された。

この成果は専門雑誌に掲載された。下記雑誌論文②参照。また、安藤龍郎氏が口頭発表を行った(2013 年 10 月 27 日，研究集会「東北結び目セミナー2013」，東北大学,“Realizing exterior Cromwell moves on rectangular diagrams by Reidemeister moves”)。

ザイフェルト・サークルたちと交差点の代わりのアークたちのシステムを綺麗な形にする研究は今まで全くなされてこなかったが、このように綺麗な形になることは予想すらしていなかった。グリッド表示は knot Floer homology とも関係するので、その方面でこの結果が応用されることが期待される。

課題２に関する成果は、かつて修士課程の学生であった西川友紀と林忠一郎の共同研究を、当時、立教大学の修士課程の学生であった安藤龍郎氏と林忠一郎の共同研究によって大幅に改良したものである。絡み目（結び目と違って輪が複数の場合も有り得る）に拡張して考えた。グリッド表示の縦線の本数 n が奇数のときと偶数のときで場合分けされる。奇数のときは、グリッド表示の交差点の数の最大値は$(n^2-2n-1)/2$ であり、偶数のときの最大値は$(n^2-2n)/2$ であることが分かった。話を結び目に戻して、上記の結果と先述のジャンプ変形に関する結果を用いて、$3n^2-4n-4-3\varepsilon$ 回以下のライデマイスター変形がグリッド表示の射影図を交差点無しに変形するか、外側エクスチェンジ変形を実現することが分かった。ただし、εはｎが奇数のとき１で、偶数のとき０であるとする。また、外側マージ変形に関しては式$(3n^2-4n-4-3\varepsilon)/2$ 回以下のライデマイスター変形が交差点無しにするか、その外側マージ変形を実現することが分かった。なお、実は、先述のジャンプ変形に関する結果にはミスがあったので、それを直さねばならなかった。

この成果は専門雑誌に掲載された。下記雑誌論文①参照。また、安藤龍郎氏が口頭発表を行った(2014 年 12 月 25 日，結び目の数学 VII，東京女子大学,“Rectangular Seifert circles and arcs system”)。

縦線の個数を固定した時の最大交差点数の評価は、今後、結び目に限定した場合や、自明結び目に限定した場合などが研究されていく可能性がある。

課題３に関する研究は、当時、学術研究員として日本女子大学に在籍した安藤龍郎との共同研究として進められた。しかし、今のところ決定的な結果は得られていない。

上記の最大の同値類の要素の個数をコンピュータを用いて計算した。n=7 のとき e(7)=15, n=8 のとき e(8)=216, n=9 のとき e(9)=1363, n=10 のとき e(10)=16290 であった。n=11 のときの計算はメモリー不足になってしまってできなかった。ｎが偶数の場合と奇数の場合ではかなり様子が異なることが分かってきた。要素の数が最大の同値類について、ｎが奇数の場合には或る特定の要素が含まれると予想しており、その予想に基づいて計算すると、ｎ＝11 の場合の最大数は 131671 である。今のところ、これらの数値たちに規則性は見つかっていない。

自明結び目に限定してマージまでに必要なエクスチェンジの回数を調べていると、n が増えていったときの規則性が見えづらいのかもしれないと考え、自明結び目に限定しないで全ての結び目を考えてみた。その場合、n=8 のときはエクスチェンジの回数の最大値は 3 であり、n=9 のときは 9 回必要な例が見つかった。しかし、これは考えるべきアーク表示の個数がとても多くなるので計算を続けるのが困難であった。

n=9 のときのマージ変形するまでに 4 回エクスチェンジ変形が必要な具体例はエクスチェンジ変形が 1 箇所しかできないので、そのような自明結び目のアーク表示を全て求めてみた。n=10 のとき、そのようなもののうちでマージするまでに必要なエクスチェンジの最大回数は 5 であり、n=11 のときは 9 であった。全体での最大値を実現する例がこの形で表されるわけではないことが分かったが、エクスチェンジできる場所が少ないほうが n が一般のときの必要回数の評価がしやすいと思われる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）

① T. Ando, C. Hayashi and Miwa Hayashi, "Rentangular Seifert circles and arcs system.”Journal of Knot Theory and its Ramifications, 査読有, Vol.23, No.8, (2014), 1450041-1 -- 1450041-23. DOI: 10.142/S0218216514500412

② T. Ando, C. Hayashi and Y. Nishikawa, "Realizing exterior Cromwell moves on rectangular diagrams by Reidemeister moves." Journal of Knot Thoery and its Ramifications, 査読有, Vol.23, No.5, (2014), 1450023-1 -- 1450023-23, DOI: 10.1142/S0218216514500230

〔学会発表〕（計　２　件）

① 2015 年 8 月 21 日，林忠一郎，「とあるカンドル彩色の探し方」，研究集会「拡大ＫＯＯＫセミナー2015」，於　神戸大学

② 2014 年 11 月 30 日，林忠一郎,(林美和との共同研究），「ライデマイスター変形に代えて」，研究集会「多様体のトポロジーの展望」，於　東京大学

〔その他〕
ホームページ
http://www2.jwu.ac.jp/kgr/jpn/ResearcherInformation/ResearcherInformation.aspx?KYCD=00006715

６．研究組織
(1)研究代表者
林　忠一郎（HAYASHI, Chuichiro）
日本女子大学・理学部・教授
研究者番号：２０２８１３２１

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし